Fraktály

Filip Koňařík
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská,
Břehová 7, 115 19 Praha
konarfil@fjfi.cvut.cz

Abstrakt

Fraktály jsou na první pohled složité soběpodobné obrazce, které však mohou často plynout z překvapivě jednoduchých matematických předpisů. Cílem příspěvku je uvést čtenáře do této problematiky, ukázat vybrané příklady fraktálů generovaných počítačem a prozkoumat, jak jsou tyto obrazce ovlivňovány jejich parametry.

1 Úvod

Fraktální vlastnosti můžeme pozorovat na množství různých objektů od sněhových vloček a větví stromů až po uměle vytvořené matematické křivky a obrazce. Abychom však věděli, kdy už můžeme objekt nazvat fraktálem, je třeba si tento pojem zadefinovat. Často se říká, že jsou to objekty soběpodobné nebo nekonečně členité. To nám může sloužit pro vytvoření dobré představy o těchto objektech, avšak o vhodnou matematickou definici se nejedná.
Nejčastěji se fraktály definují jako množiny, jejichž fraktální dimenze je větší než dimenze topologická. Topologickou dimenzi známe z běžného života, když mluvíme o tom, že je něco například dvojrozměrné nebo trojrozměrné. Fraktální dimenze už je o něco složitější a představu o ní nám může poskytnout následnující postup: Naši množinu umístíme do čtvercové mřížky a určíme, do kolika čtverců zasahuje (N_1), následně stranu čtverců zmenšíme o polovinu a opět určíme počet překrytých (N_2). Potom přibližnou hodnotu fraktální dimenze množiny dostaneme jako:

$$D_F \approx log_2 \frac{N_2}{N_1} \tag{1}$$

Přesnost této hodnoty roste se zmenšující se velikostí čtverců. Postup lze analogicky použí pro vícerozměrné množiny. (krychle ve 3d, atd.) Pro běžné geometrické útvary nám fraktální dimenze vyjde jako přirozené číslo rovné topologické dimenzi, avšak u fraktálů už dostáváme čísla racionální.

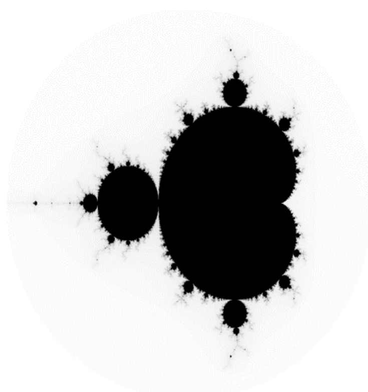
2 Escape time fractals

Protože můžeme fraktály rozdělit do mnoha skupin podle jejich vlastností, rozhodl jsem se zaměřit na jednu konkrétní skupinu tzv. escape time fractals. Tyto fraktály jsou obvykle definovány rekurentním předpisem komplexní posloupnosti jako množina bodů komplexní roviny, pro které tato posloupnost nediverguje. Při vykreslování těchto fraktálů nás tedy zajímá, zda při opakované aplikaci daného vztahu na čísla komplexní roviny hodnoty rostou k nekonečnu a nebo se naopak blíží ke konečné hodnotě.

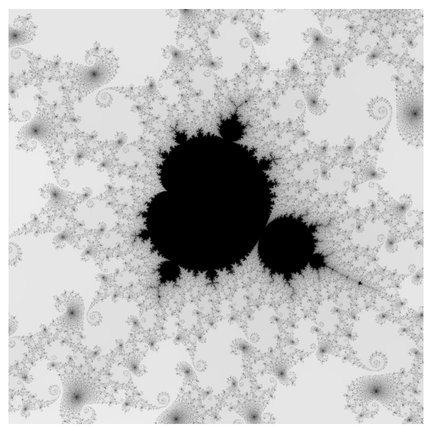
2.1 Mandelbrotova množina

Jedním z nejznámějších fraktálů vůbec je Mandelbrotova množina. Ta je definována předpisem:

$$z_0 = 0, z_{n+1} = z_n^2 + c \tag{2}$$



(a) Mandelbrotova množina



(b) Soběpodobnost při přiblížení

Obrázek 1: Snímky Mandelbrotovy množiny

2.2 Juliovy množiny

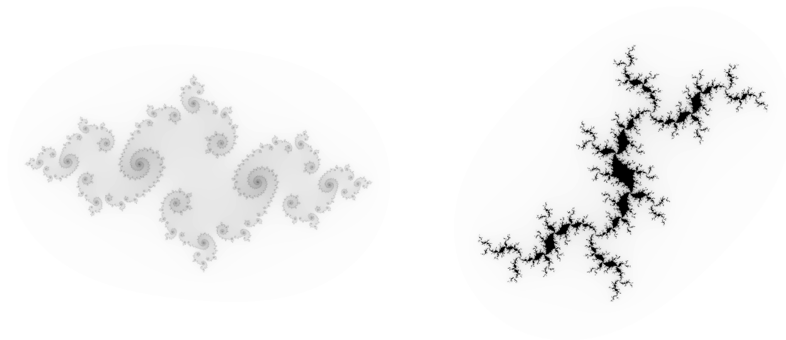
Dalším příkladem jsou Juliovy množiny dané vztahem:

$$z_0 = z, z_{n+1} = z_n^2 + c \tag{3}$$

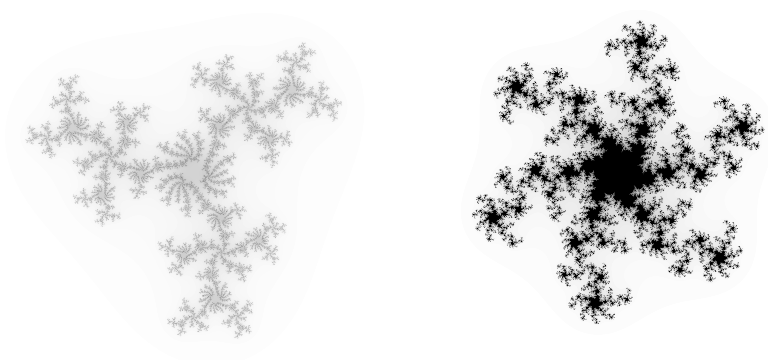
Na první pohled vypadá předpis podobně jako v případě Mandelbrotovy množiny, avšak rozdíl je v tom, že c je v tomto případě konstanta, která je společná pro všechny body. Toto číslo tedy můžeme považovat za jakýsi parametr, jehož volbou ovlivníme výsledný vzhled fraktálu.
Kromě volby parametru c můžeme také přejít od druhé mocniny k mocnině obecné, tedy použít předpis

$$z_0 = z, z_{n+1} = z_n^k + c \tag{4}$$

To se projeví změnou symetrie fraktálu.



Obrázek 2: Juliovy množiny pro dvě různé hodnoty c



(a) k=3 (b) k=6

Obrázek 3: Juliovy množiny při obecné mocnině

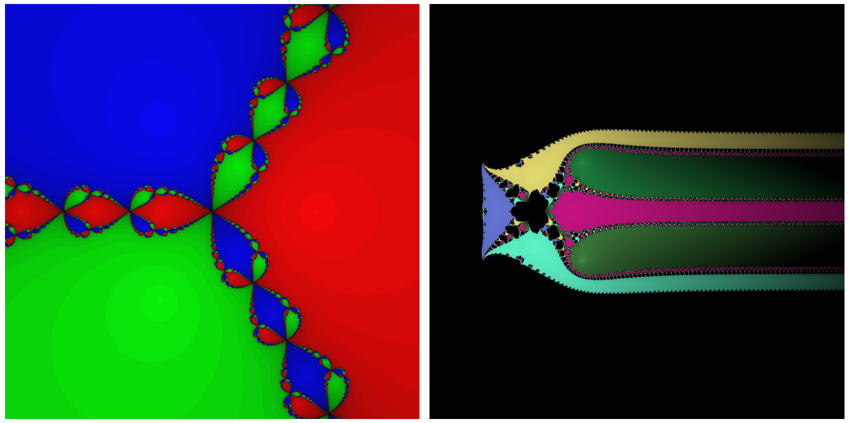
2.3 Newtonovy fraktály

Méně známou skupinou fraktálů jsou tzv. Newtonovy fraktály. Ty jsou založeny na Newtonově metodě výpočtu kořenů funkce, která funguje následovně: V libovolném bodě funkce najdeme tečnu ke grafu, najdeme průsečík této tečny s osou x, tento průsečík zvolíme jako nový výchozí bod a postup opakujeme. Takto se hodnoty průsečíku budou blížit k hodnotě kořenu funkce. Snadno se dá odvodit, že dostaneme posloupnost danou vztahem

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5}$$

V případě reálné funkce s více než jedním kořenem se od volby výchozího bodu odvíjí to, k jakému kořenu dospějeme. Při pohledu na graf to můžeme celkem jednoduše odhadovat, neboť zhruba víme, kde budou vznikat tečny. Tato intuitivnost se však zcela vytratí, pokud výše uvedený vztah aplikujeme na komplexní funkci. V takovém případě nedostaneme jednoduše oddělené oblasti komplexní roviny jak bychom mohli očekávat, ale dostaneme fraktální vzory.

Na následujících snímcích jsou barevně odlišeny body, blížící se k jednotlivým kořenům a odstín značí jak rychle se ke kořenu body blíží (světlejší rychleji).



(a) $z^3 - 1$ (b) $z^8 + 15z^4 - 16$

Obrázek 4: Newtonovy fraktály

3 Závěr

Podařilo se mi naprogramovat jednoduchý algoritmus, který dokáže generovat fraktální množiny a z takto vygenerovaných dat následně vytvářet snímky. Následně jsem mohl libovolně měnit vstupní parametry a zkoumat jak se změní výsledný fraktál. Dále by bylo možné zaměřit se na složitější objekty, například vícerozměrné fraktální množiny. To by však bylo mnohem náročnější jak na výpočetní výkon, tak na samotnou implementaci.

Reference

[1] kol. autorů, *Mandelbrot set*, https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set
[2] kol. autorů, *Julia set*, https://en.wikipedia.org/wiki/Julia_set
[3] kol. autorů, *Fraktál Newton*, https://cs.wikipedia.org/wiki/Frakt%C3%A1l_Newton
[4] Robert L. Devaney, *Fractal dimension*, http://math.bu.edu/DYSYS/chaos-game/node6.html