Zenónovy paradoxy aneb Chápeme prostor a čas?

O. Kubů

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Břehová 7, 115 19 Praha 1

kubuondr@fjfi.cvut.cz

Abstrakt

V této práci jsem se zabýval Zenónovými paradoxy, jejich možnými vysvětleními a jejich významem pro lidské chápání času a prostoru. Ukázal jsem, že diskuze o těchto paradoxech stále není u konce a že stále přetrvávají nejasnosti a spory o základních fyzikálních pojmech jako jsou čas a prostor.

1 Úvod

Zenón z Eleje (490 ? př. n. l.-430 ? př. n. l) byl řecký předsokratovský filosof z Elejské školy. Obhajoval učení svého učitele Parmenida, který říkal, že změna a pohyb jsou jen iluzí, klamem smyslů. [1] Na podporu této teze vymyslel několik paradoxů, které se dotýkají samé podstaty pojmů, jako je prostor a čas. Snaha o vyvrácení těchto paradoxů ukazuje, že ani po 2500 let není naše chápání času a prostoru bez rozporů a problémů.

2 Paradox půlení (dichotomie)

Prvním paradoxem je paradox půlení. Zenón v něm říká, že pohyb není možný, protože abychom mohli urazit jakoukoli vzdálenost, je nejdříve nutno urazit její polovinu, pak polovinu z poloviny a tak až do nekonečna. Je tedy nutno urazit nekonečné množství úseků, které nemají nulovou délku, a to dle Zenóna nelze učinit v konečném čase. A co hůř, pohyb nemůže ani začít, protože k uražení poloviny vzdálenosti je též nutné vykonat nekonečné množství kroků. [2]

Tento paradox, a stejně tak i ty ostatní, o kterých ještě budu mluvit, samozřejmě neobstojí před experimentem, pohyb je ve skutečnosti možný. Smyslem paradoxu je upozornit na rozpor mezi realitou a jejím popisem. Pro vyvrácení paradoxu je nutné hledat chyby v našich předpokladech, v našem chápání času a prostoru.

Důležitým předpokladem tohoto paradoxu je, že nelze vykonat nekonečný děj v konečném čase. Dnešní matematici by, na rozdíl od starých Řeků, řekli, že není problém se sečtením určitých nekonečných řad. V tomto případě se jedná o řadu 0,5 + 0,25 + 0,125 + 0.0625…, jejíž součet je roven 1. [2] Je zde použit infinitesimální počet a jeden malý trik. Tímto trikem je přechod od potenciálního nekonečna k nekonečnu aktuálnímu. Matematik napíše několik členů, zakončí to výpustkou (značená trojtečkou) a předpokládá, že je schopen pracovat se všemi členy, přestože je jich nekonečno. Z vlastností čísel a operací mezi nimi potom odvodí výsledek. Tímto přechodem od potenciálního k aktuálnímu nekonečnu se vyhýbá sčítání všech členů, které by opravdu trvalo nekonečně dlouho. [3]

Některé současné varianty kvantové teorie předpokládají tzv. kvantování prostoru a času. V rámci těchto teorií by tzv. Planckova délka a Planckův čas byly nejmenšími možnými, dále již nedělitelnými, součástmi času a prostoru. Planckova délka měří řádově 10^{-35} m, Planckův čas řádově 10^{-44} s. (Tento předpoklad však dosud nebyl experimentálně prokázán. Tato délka je totiž o 15 řádů menší než vzdálenosti, které jsme aktuálně schopni měřiti na nejvýkonnějších urychlovačích jako je LHC). Zavedením těchto „atomů délky a času“ by byl tento paradox vyřešen, protože se nekonečný děj mění v konečný. (Je třeba překonat pouze konečný počet elementárních délek, což trvá konečnou dobu.)

Problémem je, že jak klasická fyzika, tak teorie relativity využívá jako aparát infinitesimální počet, který předpokládá spojitý prostor a čas (existenci nekonečně malé, vzdálenosti a času, která však není nulová). Více o tomto problému dále.

2 Achilles a želva

Dalším paradox je znám jako Achilles a želva. Achilles, nejrychlejší běžec ve městě, si v něm dává závod se želvou, která je samozřejmě pomalejší. Achilles ji proto dá náskok. Nyní přijde Zenón a říká, že Achilles nemůže želvu předběhnout, protože než se dostane na místo, kde želva začínala, želva už urazí nějakou vzdálenost. [2] Takto to znovu pokračuje až do nekonečna. Tímto způsobem se sice jejich odstup neustále zkracuje, ale, stejně jako v předchozím paradoxu, nikdy nedosáhne nuly.

Matematicky je to stejně jako v předchozím paradoxu řešeno infinitesimálním počtem, tentokrát touto limitou: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$. [2] Tuto limitu je ale potřeba chápat tak, že čím více x roste, tím je zlomek $\frac{1}{x}$ blíže k 0, ale nikdy 0 doopravdy nedosáhne. Ani zde tedy není matematický pohled dostatečným řešením.

Z hlediska kvantové mechaniky je tento problém znovu vyřešen diskrétním prostorem a časem. [2] Větší rychlost Achilla znamená, že za stejný čas překoná větší počet elementárních délek než želva. Z tohoto pohledu se jedná pouze o modifikaci předchozího paradoxu a je tím pádem spojen se stejným rozporem mezi kvantovou mechanikou a teorií relativity.

3 Paradox šípu

Představme si letící šíp. V každém okamžiku je šíp přesně v nějakém bodu. Protože bod nemá žádnou délku, není možné, aby se v něm šíp pohyboval. A protože čas je sekvence časových bodů, není pohyb možný. [2]

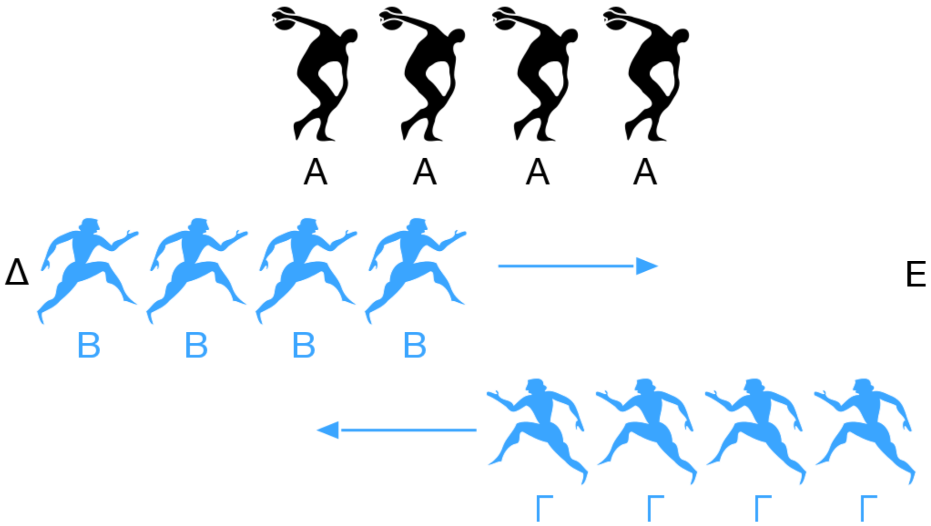
Matematika starých Řeků nerozlišovala, na rozdíl od infinitesimálního počtu, nulovou a nekonečně krátkou vzdálenost. Pro matematika je znovu řešením limita a derivace.

Při zavedení diskrétního prostoru a času se šíp, ale i jakýkoli jiný předmět, pohybuje tak, že překonává prostor skoky od délce násobků Planckovy délky. Člověk tyto skoky nevidí proto, že je Planckova délka velmi krátká.

Všechny předchozí paradoxy byly vyřešeny zavedením diskrétního prostoru a času. Jak ale ukáže poslední paradox, kterým se budeme zabývat, i tato myšlenka vede ke sporům.

4 Paradox stadiónu (moderní verze)

Zde nám Zenón ukazuje tři řady pochodujících vojáků. Řada A stojí, řady B a C se pohybují stejnou rychlostí opačným směrem. Pohybují se tak rychle, že za jednotku času se řady B a C vůči řadě A posunou o jednu jednotku (viz Obr. 1). (V této konfiguraci stačí počítat vojáky, není nutné měřit vzdálenosti. Stejný paradox by nastal i pro jediný předmět.) Zde je určitý problém s tím, že nevíme přesně, co měl Zenón tímto paradoxem na mysli, protože se žádné jeho dílo nezachovalo. [2] Paradoxem by mohlo být to, že doba, za kterou se minou řady A a B je poloviční oproti řadám B a C. Tato varianta lze vyvrátit tvrzením, že je třeba rozlišovat absolutní a relativní rychlost. [4]



Obr. 1 Paradox stadionu [5]

Zajímavější je však upravená, moderní verze: Vezměme si místo vojáků entity o Planckově délce a uvažujme, že řady B a C mají vůči řadě A rychlost světla, tj. za Planckův čas urazí právě jednu Planckovu délku. [2] Nastává zde problém s tím, že by se jednotliví pozorovatelé neshodli na velikosti Planckovy délky. To je spor buď s relativitou, nebo s Planckovou délkou.

5 Aktuální stav vědeckého chápání prostoru a času

Důsledkem posledního paradoxu je, že obě možnosti pojímání času a prostoru vedou ke sporům. Ani kvantová mechanika, ani teorie relativity nedokážou uspokojivě vyřešit všechny uvedené paradoxy. Ani po 2500 letech tak není diskuze o Zenónových paradoxech u konce.

Teorie relativity sice vyřeší paradox stadionu, využívá však matematický aparát, který předpokládá spojitý časoprostor, a má tím pádem problém s ostatními paradoxy. Výše zmiňované verze kvantové mechaniky sice s pomocí diskrétního času a prostoru řeší první tři paradoxy, paradox stadionu však nedokážou vysvětlit.

Tyto fundamentální rozdíly v přístupu k prostoru a času vedou k tomu, že se doposud nepodařilo vytvořit teorii, která by popisovala jak mikrosvět, tak makrosvět, nebo neměla jiné problémy (např. „skryté“ dimenze v teorii strun). Vyvstává otázka, zda je to vůbec možné.

Matematika se snaží pracovat jak s diskrétním, tak spojitým časem a prostorem. I přes to, že nám fyzika vybudovaná na infinitesimálním počtu byla a je velmi prospěšná, zůstává otázkou, jestli nám mohou teoretické výpočty sami o sobě poskytnout spolehlivé informace o světě kolem nás.

5 Poděkování

Děkuji panu prof. Noson S. Yanofskymu za jeho inspirující knihu [2], ze které jsem čerpal a která mě přivedla k tomuto tématu.

Dále děkuji panu Jiřímu Voltrovi za recenzi a vyvrácení několika chybných tvrzení, které se objevili v předchozí verzi.

Reference

[1] kol. autorů, *Zénón z Eleje*, https://cs.wikipedia.org/wiki/Zénón_z_Eleje

[2] N. S. Yanofsky, *The Outer Limits of Reason (What Science, Mathematics, and Logic Cannot Tell Us)*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts (2013) 41-49

[3] J. Bečvář, *Hrdinský věk řecké matematiky II*, Ve sborníku ze Semináře pro vyučující na středních školách, Jevíčko (1995), editoval J. Bečvář a E. Fuchs (Prometheus, Praha), 6-28 http://dml.cz/dmlcz/401035

[4] kol. autorů, *Zenónovy paradoxy*, https://cs.wikipedia.org/wiki/Zenónovy_paradoxy

[5] MartinGrandjean, "Zeno Moving Rows Paradox", https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Zeno_Moving_Rows_Paradox.png#/media/File:Zeno_Moving_Rows_Paradox.png