Pohyby v centrálním gravitačním poli

M. Dřízal

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Břehová 7, 115 19 Praha 1

drizamar@fjfi.cvut.cz

Abstrakt

Úkolem tohoto příspěvku bylo pokusit se o přibližné namodelování pohybů těles v centrálním gravitačním poli; tedy převést myšlenkový experiment Isaaca Newtona (také zvaný *Newton's cannoball*) do tabulkového procesoru a rozšířit jej navíc o efekty odporujícího prostředí atmosféry. Výstupem by měly být údaje o poloze, rychlosti a zrychlení tělesa v závislosti na čase a jejich vykreslení do grafu.

1 Úvod

Rovnice trajektorie pohybu v centrálním gravitačním poli je analytickým řešením *Keplerovy úlohy*. Nenabízí však velmi užitečné údaje o poloze ani rychlosti tělesa v závislosti na čase. Stejně tak nemůže obsáhnout podstatné vlivy prostředí atmosféry. Následující text dává návod jak se s tímto problémem vypořádat s pomocí počítače. I přesto se ale jedná pouze o hrubé zjednodušení, jež má nabídnout spíše ilustrativní příklady takových pohybů.

2 Gravitační síla

Pro získání pohybových rovnic uvažujeme *Newtonův gravitační zákon*:

$$\overrightarrow{F_g} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}\,.$$

Trajektorie tělesa v centrálním poli je plošná. Stačí nám rozložit vektor síly do dvou kartézských složek x a y. Tím odvodíme vztahy

$$F_{g_x} = -\frac{GMmx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,, \qquad F_{g_y} = -\frac{GMmy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Stejné vztahy bychom obdrželi ze znalosti

$$\vec{F}(r) = -\nabla U(r)$$

a gravitačního potenciálu

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}.$$

3 Odporová síla

Kvůli jednoduchosti považujme proudění kolem tělesa za turbulentní. Takovou situaci vystihuje *Newtonův vzorec*

$$\overrightarrow{F_o} = -\frac{1}{2} CS\rho v^2 \hat{\boldsymbol{v}},$$

kde C je koeficient závisející na tvaru tělesa, S je příčný průřez tělesa, ρ je hustota prostředí a $\hat{\mathbf{v}}$ značí jednotkový vektor rychlosti. Odporová síla logicky směřuje proti rychlosti tělesa a její velikost je přímo úměrná čtverci rychlosti. (Ve skutečnosti se mocnina úměrnosti na rychlosti výrazně mění podle tzv. *Reynoldsova čísla*.)

4 Barometrická rovnice

Jelikož se těleso bude pohybovat ve velkém vertikálním rozmezí nad povrchem planety, nemůžeme zanedbat závislost hustoty prostředí na výšce. Zde, zase kvůli zjednodušení, předpokládejme izotermický model atmosféry. Ten popíšeme pomocí *Boyleova-Mariotteova zákona*

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0},$$

kde p_0 a ρ_0 jsou hodnoty tlaku a hustoty u povrchu planety. Ze vzorce pro hydrostatický tlak $p = -h\rho g$ můžeme přejít k diferenciálům

$$dp = -\rho g dh,$$

a z *Boyleova-Mariotteova zákona* vyjádřit hustotu. Zde však i gravitační zrychlení g je funkcí výšky

$$g(h) = \frac{GM}{(R+h)^2}.$$

Dosazením za ρ a g, separací proměnných a substitucí $(R + h) = r$ získáme rovnici

$$\int_{p_0}^{p} \frac{1}{p} dp = -\frac{\rho_0}{p_0} GM \int_{R}^{r} \frac{1}{r^2} dr \,,$$

integrací dostaneme vztah pro tlak, zajímá nás však hustota, kterou vyjádříme:

$$\rho(r) = \rho_0 exp\left[\frac{\rho_0}{p_0} GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\right],$$

a můžeme tak dosadit do *Newtonova vzorce*.

5 Pohybové rovnice

Již známe obě síly, jež budou působit na těleso. Jejich výslednicí tedy bude

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_g} + \overrightarrow{F_o} \,.$$

Rozepíšeme kompletní rovnice v kartézských složkách x a y:

$$m\ddot{x} = -\frac{GMmx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2} CS\rho_0 exp\left[\frac{\rho_0}{p_0} GM \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{R}\right)\right] \dot{x}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \,,$$

$$m\ddot{y} = -\frac{GMmy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2} CS\rho_0 exp\left[\frac{\rho_0}{p_0} GM \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{R}\right)\right] \dot{y}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \,.$$

Už pohyb tělesa v homogenním poli s odporem úměrným druhé mocnině rychlosti je velice obtížně řešitelný analyticky. Přistoupíme proto k numerickému řešení.

6 Numerické řešení

K našemu účelu postačí nejjednodušší numerická metoda *Eulerova*. Místo spojitých funkcí se pracuje s rekurentními posloupnostmi a nahrazuje se „nekonečně malý“ diferenciál času „konečně malým“ Δt:

$$\frac{dv}{dt} = a \rightarrow \Delta v = a\Delta t \,.$$

Posloupnosti vypadají takto:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t \,,$$

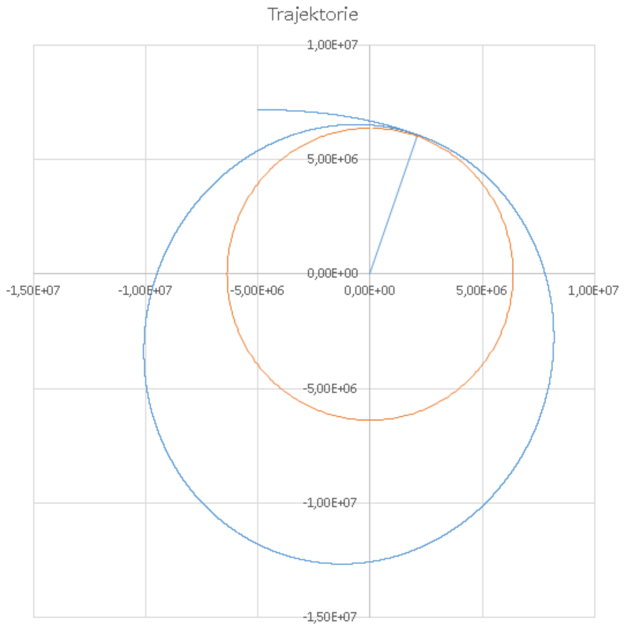
$$a_i = a(v_i,\, r_i, t_i) \,,$$

$$v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t \,,$$

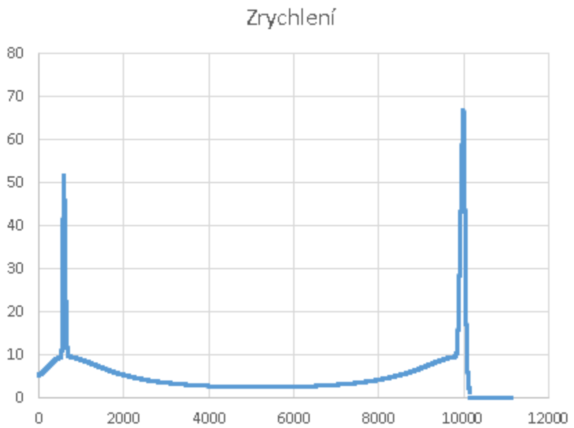
$$r_{i+1} = r_i + v_i \Delta t + \frac{1}{2} a_i \Delta t^2 \,.$$

A lze tak snadno pracovat s tabulkovým procesorem, v mém případě byl použit *MS Excel*.

7 Ukázky



Obr. 1 Návrat do atmosféry



Obr. 2 Zrychlení $[m/s^2]$ v záv. na čase [s]

Obr. 1 odpovídá trajektorii kulového tělesa o hmotnosti $1000\,kg$ vrženého rychlostí $v_x = 10500\,m/s$ z výšky $2500\,km$ k planetě Zemi pro parametry: $C = 0{,}48$, $\rho_0 = 1{,}2\,kg/m^3$, $p_0 = 101325\,Pa$, $S = 2\,m^2$. Ve výšce asi $100\,km$ nad povrchem Země na něj začne více působit atmosféra, která jej částečně zpomalí, takže přejde na eliptickou oběžnou dráhu. Druhá interakce s atmosférou už tělesu nedovolí dále pokračovat a to spadne na povrch. Na obr. 2 je vidět absolutní hodnota zrychlení. Při první interakcí došlo k přetížení asi 5 g, při druhé skoro 7 g. Je otázkou, jak dlouho by takové přetížení snesli například astronauti, vracející se na Zemi.

Reference

[1] I. Štoll, *Mechanika*, Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha (2010)

[2] P. Šedivý, *Modelování fyzikálních dějů numerickými metodami*, http://fyzikalniolympiada.cz/texty/modelov.pdf