

Pohyby v centrálním gravitačním poli

Problém

- Newtonův gravitační zákon:

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$$

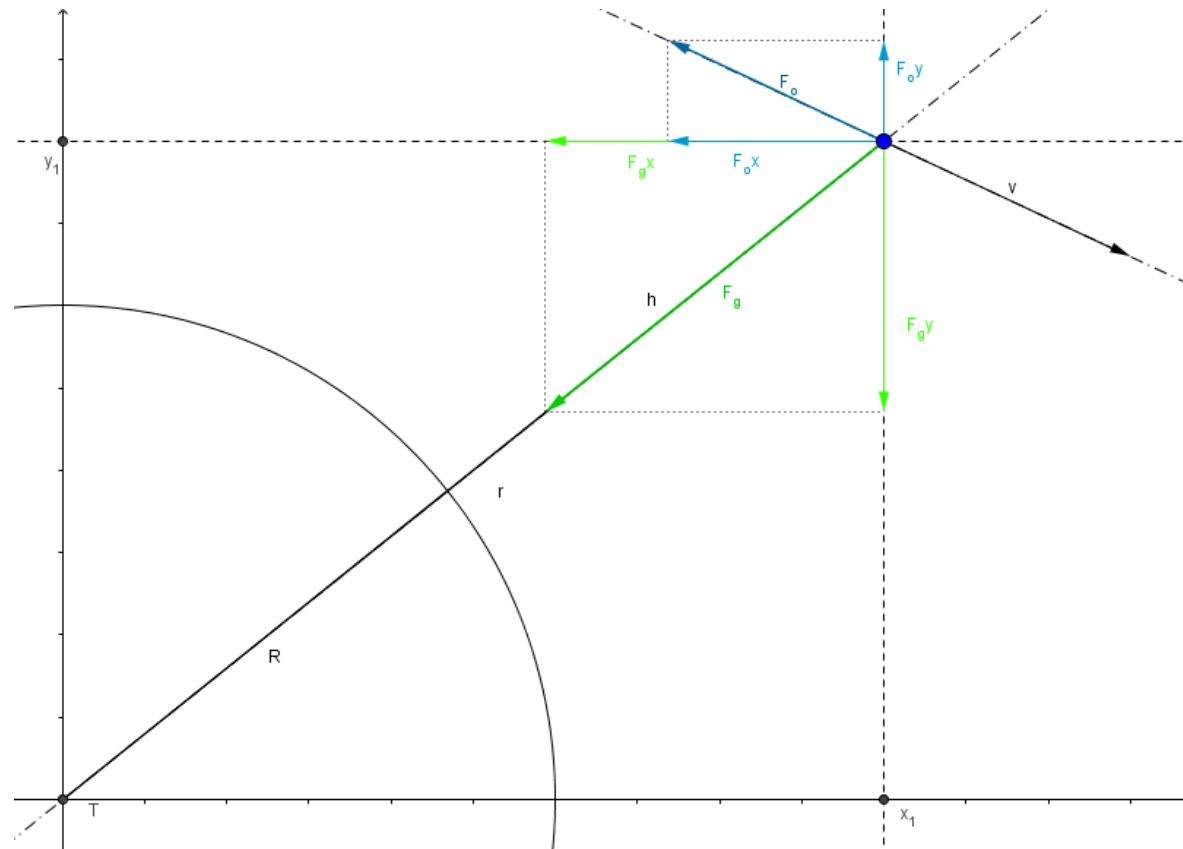
- Gravitační síla závisí na poloze
- Chceme popsat rychlost, polohu, trajektorii,...

Složky síly

- Sílu rozložíme na složky ve směrech x, y

- $$F_{g_x} = -\frac{GMmx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- $$F_{g_y} = -\frac{GMmy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$



Odporová síla

- Uvažujme turbulentní proudění tekutiny kolem tělesa
- Odporovou sílu popisuje Newtonův zákon odporu:

$$\mathbf{F}_o = -\frac{1}{2}CS\rho v^2 \hat{\mathbf{v}}$$

- Je přímo úměrná čtverci rychlosti
- Působí **proti** směru rychlosti

Odporová síla, hustota

- Ve vztahu $F_o = -\frac{1}{2}CS\rho v^2\hat{v}$ není ρ konstantou!
- Vzduch je stlačitelný – hustota závisí na tlaku
- Uvažujme izotermickou atmosféru – platí Boyle-Mariottův zákon:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

- Hustota je přímo úměrná tlaku

Barometrická rovnice

- Změna tlaku dp je přímo úměrná změně výšky dh

$$dp = -\rho g dh$$

- g je funkce výšky h : $g(h) = \frac{GM}{(R+h)^2}$

- Dosazením za ρ a g , separací proměnných a substitucí $(R + h) = r$ získáme rovnici:

$$\int_{p_0}^p \frac{1}{p} dp = -\frac{\rho_0}{p_0} GM \int_R^r \frac{1}{r^2} dr$$

- Dostaneme vztah závislosti tlaku na r , vyjádříme pro hustotu:

$$\rho(r) = \rho_0 \exp \left[\frac{\rho_0}{p_0} GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \right]$$

Pohybové rovnice

- Výslednice sil:

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_o$$

$$m\ddot{x} = -\frac{GMmx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}CS\rho_0 \exp\left[\frac{\rho_0}{p_0}GM\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{R}\right)\right] \dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$m\ddot{y} = -\frac{GMmy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}CS\rho_0 \exp\left[\frac{\rho_0}{p_0}GM\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{R}\right)\right] \dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

- Nelineární diferenciální rovnice druhého řádu

Numerické řešení

- Nejjednodušší - Eulerova metoda

$$\frac{dv}{dt} = a \rightarrow \Delta v = a\Delta t$$

- Posloupnosti místo funkcí:

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}_i\Delta t$$

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}_i\Delta t^2$$

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}(\mathbf{v}_i, \mathbf{r}_i, t_i)$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

Ukázky

- Balistická křivka
- Kosmické rychlosti (kruhová, eliptická, hyperbolická trajektorie)
- Oběžná dráha ISS
- Oběžná dráha geostacionárních družic
- Návrat do atmosféry

Co je špatně

- Koeficient odporu C závisí na Reynoldsově čísle
- Při $Re < 2320$ laminární, při $Re > 4000$ turbulentní proudění
- Atmosféra není izotermická
- Zvolená numerická metoda je velmi nepřesná
- ...
- ...
- ...

Děkuji za pozornost
