Jak na matematické modelování

J. Lepšová
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Břehová 7, 115 19 Praha 1
lepsojan@fjfi.cvut.cz

Abstrakt

Cílem tohoto projektu je základní seznámení s problematikou matematického modelování a demonstrace využití této techniky na konkrétním problému – úloze tří těles. Součástí projektu je zpracování úlohy tří těles v počítačovém programu a ukázky výsledků práce programu při různých vstupních datech (resp. počátečních podmínkách).

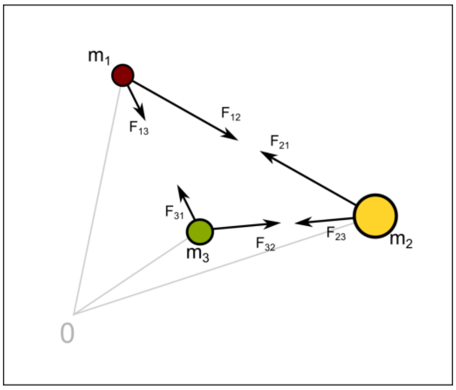
1 Úvod

Matematické modelování je technika, která se snaží o simulaci některého přírodního jevu pomocí počítačového programu (např. Matlab). Na základě této simulace se následně pokoušíme předpovídat chování systému v budoucnu. Základní schéma matematického modelování vypadá tak, že od fyzikálního modelu přechází k modelu matematickému a následně k numerickému schématu. Ideálním příkladem využití matematického modelování může být předpověď počasí, čímž je však okamžitě zřejmá slabina této techniky – riziko nepřesnosti a následné chybné předpovědi. Hlavním cílem tohoto projektu bylo vyzkoušet si tuto techniku při modelování konkrétního problému a odprezentovat výsledky a zkušenosti.

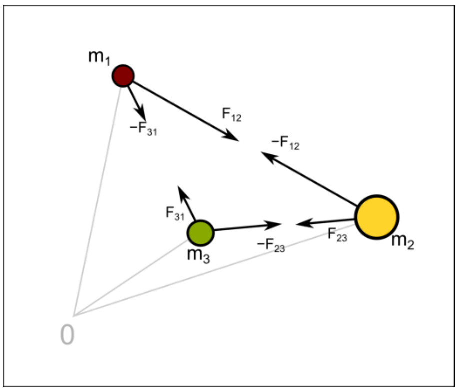
2 Úloha tří těles – fyzikální model

Slavná úloha, o jejíž řešení se v historii pokoušelo mnoho fyziků, bohužel (narozdíl od úlohy dvou těles) nedošla analytického řešení. Ukázalo se, že k popisu chování systému o třech vzájemně se ovlivňujících tělesech, z nichž má každé svoji hmotnost, proměnlivou polohu a rychlost, máme příliš mnoho proměnných a příliš málo popisných rovnic.

K přiblížení fyzikálního modelu uvažujme situaci na obrázku 1, kde m_i vyjadřuje hmotnost i-tého tělesa a F_{ij} vyjadřuje silové působení i-tého tělesa na j-té těleso (pro přehlednost nejsou vyznačeny vektory polohy a rychlosti jednotlivých těles). Na základě zákona akce a reakce můžeme obrázek 1 překreslit na obrázek 2.



Obr. 1 Silové působení tří těles



Obr. 2 Silové působení tří těles

S využitím zákona síly a obrázku 2 můžeme např. pro první těleso psát rovnici (pro ostatní tělesa analogicky):

$$m_1 \times \overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{F_{12}} - \overrightarrow{F_{31}}$$

Vzhledem k tomu, že F_{ij} je pro každé dva různé indexy síla gravitační, závisí pouze na hmotnostech daných těles a jejich vzájemné poloze. Rovnici výše tedy můžeme vydělit hmotností daného tělesa a považovat ji za funkci zrychlení daného tělesa v závislosti na poloze. Problémem je fakt, že tato funkce závisí na polohách všech těles, a tedy není možné rovnici zintegrovat, jako bychom to bývali udělali u úlohy dvou těles.

4 Úloha tří těles – matematický model

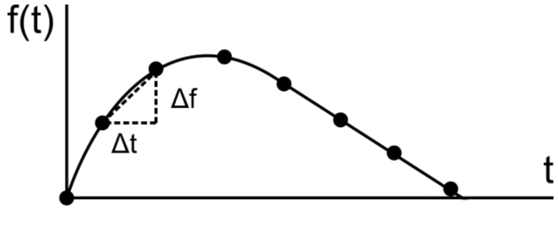
Matematickým modelem rozumíme rovnice, které popisují chování systému. Pro nás jsou to následující rovnice, kde horní či dolní index vyjadřuje index tělesa, tečka nad proměnnou znamená časovou derivaci proměnné, proměnná *r* vyjadřuje polohu tělesa a proměnná *v* rychlost tělesa. Dolní index *init* ve spojení s proměnnou *r* (resp. *v*) vyjadřuje počáteční polohu (resp. počáteční rychlost) daného tělesa. Pro přehlednost textu byly vynechány šipky u vektorových veličin.

$$\dot{r}^{(i)} = v^{(i)} \qquad \dot{v}^{(i)} = \frac{1}{m_i} \sum_{j \neq i} F_{ij}$$

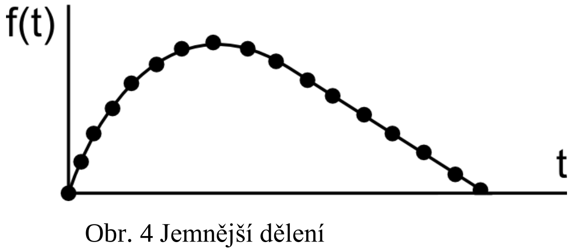
$$r^{(i)}(0) = r_{init}^{(i)} \qquad v^{(i)}(0) = v_{init}^{(i)}$$

5 Úloha tří těles – numerické schéma

Vzhledem k tomu, že rovnice chování systému neumíme pro více než dvě tělesa analyticky řešit, přejdeme nyní k numerickému schématu. Jeho účelem je aproximovat chování systému pomocí rekurentních vztahů. Pro přiblížení myšlenky řešení připomeňme význam časové derivace funkce.
V grafu závislosti funkce na času vyjadřuje derivace funkce v určitém bodě směrnici tečny grafu funkce v tomto bodě. Rozdělíme-li graf na *n* úseků jako na obrázku 3, můžeme derivaci v určitém úseku aproximovat jako podíl rozdílů funkčních hodnot v krajních bodech a délky časového úseku. Je zřejmé, že čím jemnější je dělení, tím přesnější je naše aproximace.



Obr. 3 Aproximace časové derivace



Obr. 4 Jemnější dělení

S touto myšlenkou můžeme psát následující aproximace:

$$\dot{r} \approx \frac{r_{n+1} - r_n}{\Delta t} \qquad \dot{v} \approx \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t}$$

Označíme nyní

$$\dot{r} \approx \frac{r_{n+1} - r_n}{\Delta t} = v_n \qquad \dot{v} \approx \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} = a_n$$

Rovnice výše můžeme napsat pro každé těleso a upravit na následující tvar, který spolu s počátečními podmínkami tvoří numerické schéma:

$$r_{n+1}^{(i)} = r_n^{(i)} + \Delta t \times v_n^{(i)}$$

$$v_{n+1}^{(i)} = v_n^{(i)} + \Delta t \frac{1}{m_i} \Big(\sum_{j \neq i} F_{ij}\Big)_n$$

6 Zpracování v počítači

Jak vypadá práce počítačového programu? Nejprve je třeba zadat hmotnosti daných těles, jejich počáteční vektory polohy a počáteční vektory rychlosti. Dále je třeba popsat funkci, která vypočítává velikost a směr gravitační síly mezi dvěma tělesy. Zvolíme velikost časového kroku Δt (např. 1 den) a počet kroků n (např. 365, tedy dobu jednoho oběhu Země okolo Slunce).
Vytvoříme cyklus o n krocích, který v prvním kroku využívá námi zadaných počátečních podmínek a pomocí numerického schématu stanoví nové vektory polohy a rychlosti (důležitým mezikrokem je stanovení vzájemného silového působení mezi tělesy). Nové vektory jsou ve druhém kroku vzaty za počáteční stav a cyklus se opakuje. Poté stačí nechat výsledky jednotlivých kroků vykreslit do grafu.

7 Poděkování

Ráda bych tímto poděkovala ing. Vojtěchu Svobodovi, CSc. za motivaci ke vzniku tohoto projektu a umožnění jeho prezentace. Největší poděkování pak patří doc. ing. Jiřímu Mikyškovi, Ph.D. za vedení práce a množství času a energie, které ztratil během konzultací.

8 Reference

[1] I. Štoll, *Mechanika*, Vyd. 3. V Praze: ČVUT, 2010, 209 s. ISBN 978-80-01-04554-1
[2] kol. autorů, *List of gravitationally rounded objects of the Solar System*, https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_gravitationally_rounded_objects_of_the_Solar_System#Planets