O akustických mlýncích profesora Dvořáka

J. Mazáč [1], D. Štěrba [2]

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Břehová 7, 115 19 Praha 1

[1]hanis.mazac@gmail.com, [2]daniel.sterba@gmail.com

Abstrakt

V naší práci jsme navázali na dílo v Čechách nedoceněného fysika Vincence Dvořáka, odborníka na akustiku a elektromagnetické vlnění, komtura Řádu Františka Josefa a zakladatele moderní chorvatské fysiky. Cílem našeho výzkumu bylo podrobnější zkoumání jeho akustických mlýnků a možné vysvětlení příčin jejich pohybu. S tímto tématem souvisí i problematika Helmholtzových resonatorů, jichž jsme v této práci použili pro matematický popis celého systému. Dále jsme zkonstruovali takovýto mlýnek, prozkoumali jsme jeho vlastmosti a naměřili jsme jeho charakteristiky.

1 Úvod - profesor Vincenc Dvořák

Profesor Vincenc (též Čeněk) Dvořák (1848-1922) byl česko-chorvatský fyzik, který svůj život zasvětil propojování akustiky a elektromagnetismu. Narodil se v Jihlavě, zde vystudoval Latinsko-německé gymnasium, a následně úspěšně promoval na Filosofické fakultě Karlovo-Ferdinandovy univesity v Praze v oborech matematika a fysika. Zde byl posluchačem mj. Ernsta Macha, se kterým se velmi sblížil a oba se stali přáteli. Po promoci Vincenc Dvořák získává místo vedoucího kabinetu fysiky na nově zřízené universitě v Záhřebu a stojí v jejím čele téměř až do roku 1911. Nejen proto je považován za zakladatele moderní chorvatské fysiky. V jeho vědecké práci je vidět snaha nalézt propojení elektřiny a akusitky, a není tedy divu, že většina jeho prací se věnuje jevům převážně akustickým. V článku z roku 1884 s názvem *Professor Dvorak's acoustic mills* poukazuje na zajímavý jev, kdy dochází k rotaci konstrukce s dutými resonatory - ne nepodobné radiometrům - pod vlivem zvuku. Profesor Dvořák v tomto článku jev popisuje a podává přibližné vysvětlení tohoto jevu. My jsme sestavili takovýto mlýnek, akorát za použití PET lahví, a pokusili jsme se tento jev matematicky aproximovat a změřit některé faktory ovlivňující výslednou rychlost rotace.

2 Teorie

Jak jsme již řekli, našim cílem bude při popisu tohoto systému získat rychlost otáčení našeho mlýnku. Proto je třeba si uvědomit, co se vlastně děje. Když soustavu ozvučíme, vyvoláme při určité frekvenci zvuku resonanci lahve. Ta způsobí periodické změny tlaku uvnitř lahve a ty jsou příčinou proudění vzduchu z a do lahve. Pokud ovšem dochází k tomu, že při jedné fázi je vzduch vypouštěn z lahve, pak podle 3. Newtonova zákona musí existovat nějaká síla, která působí proti tomuto proudění. Tato síla je skutečně měřitelná a tento fakt bude posléze využit při měření resonančních charakteristik našich lahví. Nejprve tedy aproximujeme změny tlaku v hrdle lahve a budeme předpokládat, že se její objem nemění - tzn. že veškeré změny tlaku v lahvi lze popsat pouze pohybem válce vzduchu v hrdle lahve. Označme p_0 jako tlak v lahvi, na kterou nepůsobí zvuk a V_0 jako objem válce vzduchu v hrdle (což je vlastně jen změna polohy konce vzduchového válce Δx krát plocha hrdla S). Pak také ΔV změnu objemu a Δp změnu tlaku vlivem zvuku. Platí rozhodně, že tyto změny tlaku jsou adiabatické, vzhledem k frekvencím, na kterých se pohybujeme ($\sim$ 100 Hz). Proto můžeme psát

$$(p_0 + \Delta p)(V_0 + \Delta V)^\kappa = p_0 V_0^\kappa \tag{1}$$

Úpravou rovnice (1) (vytkneme V_0 ze závorky a rovnici podělíme členem V_0^κ) a aplikací Taylorova rozvoje na člen umocněný na κ a následným roznásobením získáme tvar

$$p_0 + p_0\kappa\frac{\Delta V}{V_0} + \Delta p = p_0 \tag{2}$$

a odtud dostaneme finální vztah pro změnu tlaku, který posléze využijeme

$$\Delta p = -p_0\kappa\frac{\Delta V}{V_0} \tag{3}$$

Nyní se pokusíme napsat pohyovou rovnici tohoto vzduchového válce. Zřejmě platí

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{F}{m} = \frac{S\Delta p}{m} \tag{4}$$

Po dosazení za m a p dostaneme rovnici podobnou rovnici harmonického oscilátoru, a tedy můžeme určit frekvenci, na které bude docházet k maximální rezonanci, a to jako

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa p_0 S}{V_0\rho l}} \tag{5}$$

Tento vztah poté experimentálně ověříme.

Nyní se věnujme ještě jednou pohybu vzduchu v lahvi - můžeme jej ještě lépe popsat jako nucený buzený oscilátor s tlumením, tedy rovnicí, a tím získat amplitudu pohybu vzduchu v lahvi v resonanci

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{F'}{m}\cos(\Omega t) \tag{6}$$

Zde vystupuje na pravé straně periodická budící síla F' s frakvencí Ω. To je vlastně zvuk, který na lahev pouštíme. Parametr γ vyjadřuje v podstatě kvalitu resonance a lze jej získat jako šířku resonančního píku v polovině amlpitudy. Řešení rovnice (6) pro amplitudovou resonanci lze zapsat ve tvaru

$$A = \frac{F'}{m\gamma\omega}\sqrt{R} \tag{7}$$

Koeficient R charakterisuje resonanci - při maximální resonanci je jeho hodnota rovna 1, a tedy tento člen při výpočtu vypadne. Opět ještě dosadíme za F' a m získáme finální rovnici popisující amplitudu při pohybu vzduchu v lahvi

$$A = \frac{\Delta p'}{l\rho\Omega\gamma} \tag{8}$$

Ještě je třeba znát onu změnu tlaku $\Delta p'$, která ale není nic jiného než změna tlaku zvuku při jisté frekvenci a intenzitě, tedy dle vztahu

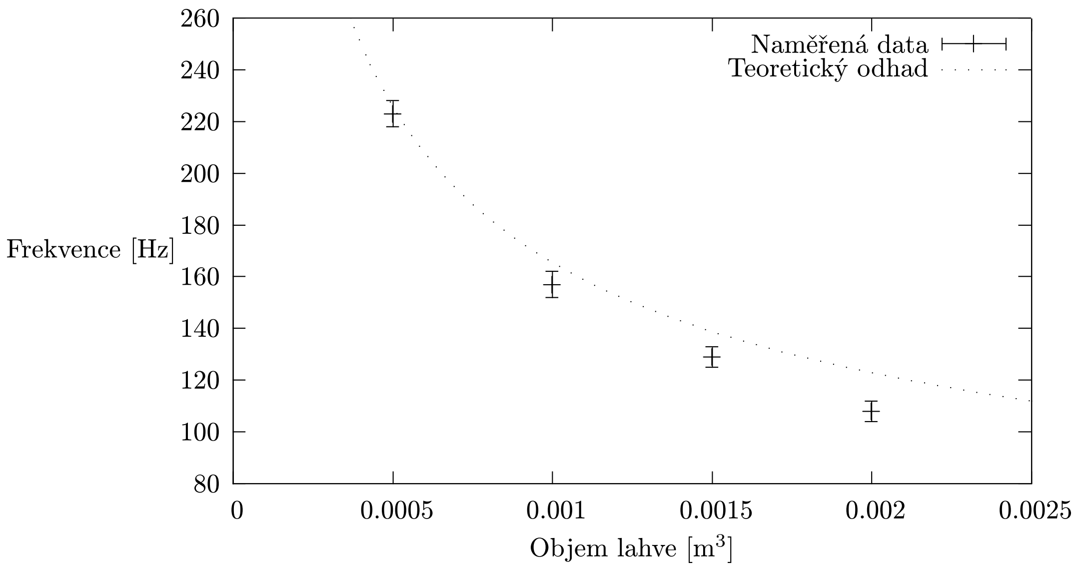
$$\Delta p' = \sqrt{2pI\sqrt{\frac{R_u T}{\kappa M}}} \tag{9}$$

Nyní již máme vše potřebné, aychom mohli dát do rovnosti sílu, která vzniká při rezonanci, a odporovou sílu. Neznáme jen součinitel odporu tření C - ten ale můžeme snadno odhadnout, neboť určitě musí náležet intervalu $\left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle$. Tření závěsu zanedbáme. Pak tedy vyjádříme pomocí poloměru závěsu y a průřezu celé lahve S_2 úhlovou rychlost otáčení sestavy Ω_s

$$\Omega_s = \sqrt{\frac{2F}{\rho S_2 C y^2}} \tag{10}$$

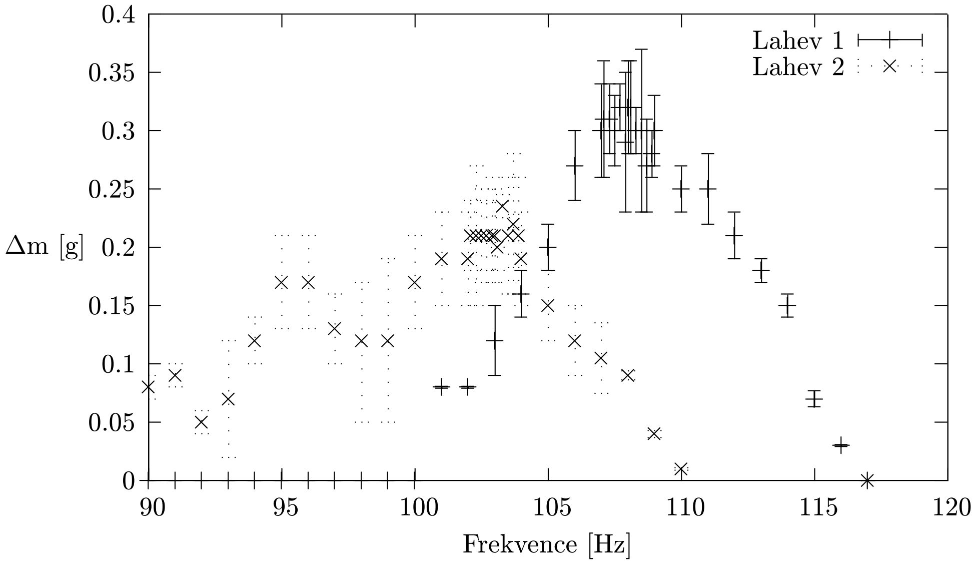
3 Měření

Abychom dokázali experimentálně potvrdit naši teorii, pokusili jsme se nejprve určit platnost vztahu (5). Pro jeho ověření jsme sestrojili aparaturu, pomocí které jsme změřili resonanční frekvenci. Jednalo se o citlivé laboratorní váhy (přesnost na tisíciny g), na kterých jsme detekovali změnu hmotnosti při působení zvuku. Výsledek zobrazuje graf 1, přičmež také ukazuje teoretickou hodnotu odvozenou ve vztahu (5)



Obr. 1: Závislost frekvence na objemu lahve

V dalších měřeních jsme pro zvolené lahve vytvářely na vahách resonanční charakteristiky a na jejich základě určovali paramter γ. Graf 2 ukazuje typické výsledky. Tohle měření bylo opět prováděno stejnou metodou jako předešlé.



Obr. 2: Resonance lahví

4 Závěr

V naší práci jsme prověřili a prozkoumali práci Vincence Dvořáka, sestrojili jsme vlastní akustický mlýnek v domácích podmínkách, podařilo se nám jej uvést do funkčního stavu. Matematicky jsme popsali, na jakém principu dochází k resonanci, a naše výsledky jsme potvrdili měřením. Chyba se pohybuje u prvého měření kolem 8 %, u predikce rychlosti kolotoče je značně vyšší díky mnoha aproximacím. Celkově se ale jednalo o zajímavé téma, které dosud není zcela vyčerpáno a okolo nějž zůstává řada nevyjasněných otázek.

5 Poděkování

Velký dík patří prof. Dr. Tomáši Opatrnému, DrSc. a jeho týmu z Univerzity Palackého v Olomouci za jeho ochotu a připomínky a také ing. Vojtěchu Svobodovi, CSc. za umožnění presentace tohoto přspěvku.

6 Reference

[1] V. Dvořák, *Ueber die akusitsche Anziehung und Abstoßung*, 1876
[2] V. Dvořák, *Professor Dvorak's sound mills*, Popular Science Motnhly, 1884
[3] Z. Horák, *Základy technické fysiky*, ROH-Práce, Praha (1953)
[4] kol. autorů, *Harmonic_oscillator*, https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_oscillator