

Chladniho obrazce

N. Kozmová, M. Rost*, J. Šenkýřová

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Břehová 7, 115 19 Praha 1

*rostmare@fjfi.cvut.cz

Abstrakt

Příspěvek se bude zabývat historií a původem Chladniho obrazců. Zmíní se o metodách matematického popisu a na závěr věnuje chvíli reprodukci Chladniho experimentu s deskami různých tvarů.

1 Úvod

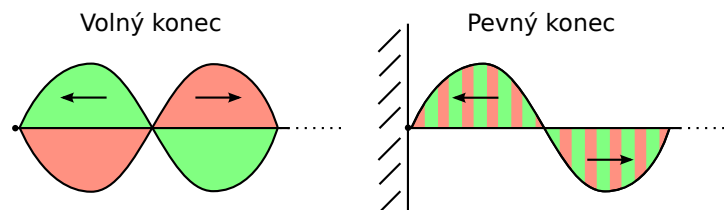
Ernst Florens Friedrich Chladni (1756 – 1827) vystudoval právo a filozofii na univerzitě v Lipsku, ale jeho skutečným zájmem byla hudba a věda. Těm se začal naplno věnovat až po smrti svého otce. O pozorování útvarů na kmitajících deskách se zmiňovali už Leonardo da Vinci nebo Galileo Galilei[1], věnoval se jim také polyhistor Robert Hooke[5], který si všiml, že se na skleněných deskách přesunuje mouka a vznikají čáry, tře-li o desku smyčcem.

Chladni se problému na rozdíl od ostatních jako první věnoval systematicky a předváděl ukázky obrazců při svých cestách Evropou. V letech 1808 až 1810 navštívil i Paříž, kde svá pozorování předvedl Napoleonovi. Ten Chladniho finančně odměnil za připravovaný překlad a druhé vydání díla *Die Akustik* a také vyhlásil odměnu za matematické popsání úlohy.

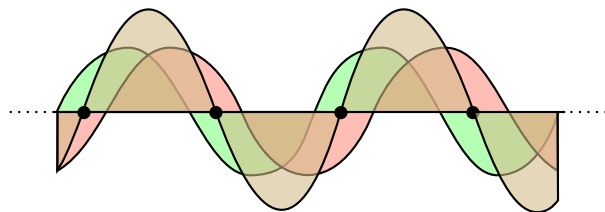
Odměnu ve výši 3000 franků (nikoliv kilogram zlata, což byla původní odměna slíbená Napoleonem) získala roku 1816 matematicka Marie-Sophie Germain, přestože její řešení se komisi nezdálo zcela uspokojivé, neboť nepodávalo dostatečně přesné hodnoty v porovnání s měřením. Toho dosáhl pro kruhovou desku až Gustav Robert Kirchhoff v 2. polovině století.

2 Princip a matematický popis

Chladniho obrazce vznikají přemísťováním drobných částech (Chladni používal písek) po povrchu kmitajícího objektu (ať už desky nebo hudebního nástroje) do uzlů - míst, kde je amplituda kmitů nulová. Toto stojaté vlnění vzniká skládáním podélného vlnění šířícího se deskou s jeho vlastními odrazy od okrajů.



Obr. 1: Odraz vlnění (znázorněno na příčném vlnění) od volného a pevného konce.



Obr. 2: Stojaté vlnění. Zvýrazněné body jsou uzly.

2.1 Chladniho popis

V době, kdy Chladni prováděl svá pozorování, ještě neexistoval matematický aparát, který by dokázal popsat kmitání desky ve tvaru $z = f(x, y, t)$. Chladni prováděl četné experimenty, kdy rozezvučel desky různými tóny o kmitočtu f a zaznamenával zvlášť počet m, n uzlových čar na desce. Při svých pozorováních došel ke vztahu (1) [6].

$$f \sim (m + 2n)^2 \quad (1)$$

2.2 Sophie Germain

Přestože byla žena, Sophie Germain se věnovala fyzice elastických materiálů a několikrát se přihlásila do soutěže o vytvoření teorie, která by vysvětlovala původ Chladniho obrazců, třetí pokus byl úspěšný a diferenciální rovnice (2), je konečná rovnice ke které dospěla.

$$N^2 \left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right) = 0 \quad (2)$$

2.3 Václav Potoček

Matematický popis obrazců sestavil pro čtvercovou desku i student FJFI Václav Potoček [3]. Nejprve určil podmínku rezonance pro danou vlnovou délku, a poté složením vlny s kmity po prvním odrazu (druhý odraz na čtvercové desce dá opět vlnu ve stejném směru) dospěl k rovnici (3), kde A, B jsou konstanty a a hrana desky.

$$z(x, y, t) = \cos(\omega t) \left(A \cos \left(m\pi \frac{x}{a} \right) \cos \left(n\pi \frac{y}{a} \right) + B \cos \left(m\pi \frac{x}{a} \right) \cos \left(n\pi \frac{y}{a} \right) \right) \quad (3)$$

3 Pokus

Základním předpokladem úspěšné realizace pokusu je vodorovná poloha desky, neboť pokud je během kmitání nakloněna i o nepatrný úhel, dochází k posunu sypké látky ve směru náklonu a tím k deformaci tvořících se obrazců.

Deska byla rozkmitána buď úderem kovovým předmětem nebo basovým smyčcem. Vzhledem k tloušťce a materiálu desek (3mm mosaz) nebylo možné je rozvibrovat reproduktorem.



Obr. 3: Uzlové čáry na čtvercové desce. Vlevo: rozkmytání desky ze středu hrany, vpravo: rozkmytání z rohu.



Obr. 4: Uzlové čáry na šestiúhelníkové desce. Vlevo: rozkmytání desky ze středu hrany, vpravo: rozkmytání z rohu.



Obr. 5: Uzlové čáry kruhové desce.

Poděkování

Děkujeme Gym. Ch. Dopplera za zapůjčení Chladního desek. Také děkujeme Ing. Vojtěchu Svobodovi, CSc. za poskytnutý prostor pro prezentaci a za organizaci Fyzikálního semináře.

Reference

- [1] H. J. Stöckmann, *Chladni meets Napoleon*, Eur. Phys. J. Special Topics 145 (2007) 15-23
- [2] D. Ullmann, *Life and work of E.F.F. Chladni*, Eur. Phys. J. Special Topics 145 (2007) 25-32
- [3] V. Potoček, *Matematické modelování Chladního obrazců*, Fyzikální seminář (2004/2005)
- [4] T. Nohavová, T. Ježková, H. Vlašic *Chladního obrazce*, Fyzikální seminář (2008/2009)
- [5] A. Chapman, *Hooke and the art of experiment in Restoration England*, <http://home.clara.net/rod.beavon/leonardo.htm>
- [6] D. Kverno a J. Nolen, *A Study of Vibrating Plates*, <http://www.phy.davidson.edu/StuHome/derekk/Chladni/pages/menu.htm>
- [7] W. Xiao, *Chladni pattern*, <http://rudar.ruc.dk/handle/1800/5190>
- [8] W. Fendt, *Stojaté vlnění (aplet)*, http://www.walter-fendt.de/ph14cz/stwaverefl_cz.htm