

# Lissajousovy obrazce

J. Solovský\*, M. Stehlík\*\*

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Břehová 7, 115 19 Praha 1

\*jakubsolovsky@gmail.com, \*\*marsteh@centrum.cz

## Abstrakt

Lissajousovy obrazce jsou křivky, které vznikají při skládání dvou kolmých kmitů. Jsou pojmenovány po fyzikovi Jules Antoine Lissajousovi, který je předvedl na světové výstavě v Paříži. Je několik možností jak je zobrazit: počítač, osciloskop, Blackburnovo kyvadlo. My jsme použili Blackburnovo kyvadlo. Obrazce se využívají při určování neznámých frekvencí.

## 1 Úvod

Lissajousovy obrazce jsou křivky, které vznikají skládáním dvou kolmých kmitů. Jejich tvar závisí na frekvenci jednotlivých kmitů a na jejich počátečních fázích. Pokud je poměr frekvencí racionální číslo, vznikne uzavřená křivka, jinak bude křivka otevřená. Praktické využití mají křivky uzavřené.

## 2 Historie

Touto problematikou se v 19. století nezávisle na sobě zabývali dva vědci. Nathan Bowdith, který je popsal už v roce 1815 a použil přitom právě Blackburnovo kyvadlo. Druhým byl Jules Antoine Lissajous, který svou práci publikoval až v roce 1857, ale využil přitom světlo a soustavu zrcadel. V roce 1867 je pak předvedl veřejnosti na světové výstavě v Paříži.

## 3 Matematický popis

Při složení dvou kolmých kmitů v osách  $x$ ,  $y$  dostaneme parametrické rovnice křivek:

$$x = A \cdot \sin(\omega_1 t + \phi_1)$$

$$y = B \cdot \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

Kde  $A$ ,  $B$  jsou amplitudy kmitů ve směrech os  $x$ ,  $y$ . Amplitudy kmitů určují celkový rozměr obrazce, neboli udávají poměr šířky a výšky. Mnohem více se na tvaru podílí  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  – frekvence kmitů, a  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  – počáteční fáze kmitů. Proměnná  $t$  reprezentuje čas.

Z parametrických rovnic lze už na počítači vymodelovat křivku pro libovolné podmínky. Pro některé případy se z parametrických rovnic dá spočítat i implicitní tvar – například pokud jsou frekvence obou kmitů stejné, a počáteční fáze je nulová, bude výsledná křivka elipsa s poloosami  $A$ ,  $B$ .

## 4 Využití

Lissajousovy obrazce se využívají pro určení neznámé frekvence. Princip je velice jednoduchý, stačí tyto kmity složit kolmo s jinými o známé frekvenci a z výsledného obrace můžeme určit neznámou frekvenci. Na zobrazení výsledku se používá počítač nebo osciloskop. Lze tedy určit frekvence všech veličin, které se dají nějakým způsobem převést na elektrické napětí. Takovýto postup, se ale moc nepoužívá. V běžné praxi stačí rychlejší a levnější metody. Ty sice nejsou tak přesné ale ve většině případů dostačující.

## 5 Náš experiment

Pro zobrazení obrazců jsme použili Blackburnovo kyvadlo. Je to nejjednodušší způsob jak obrazce získat. Závěs kyvadla je rozdělen na dvě části, které umožňují pohyb v navzájem kolmých směrech.

Kyvadlo můžeme pro malé výchylky s dostatečnou přesností považovat za dvě matematická kyvadla. Ze vztahu pro matematické kyvadlo můžeme určit periodu:

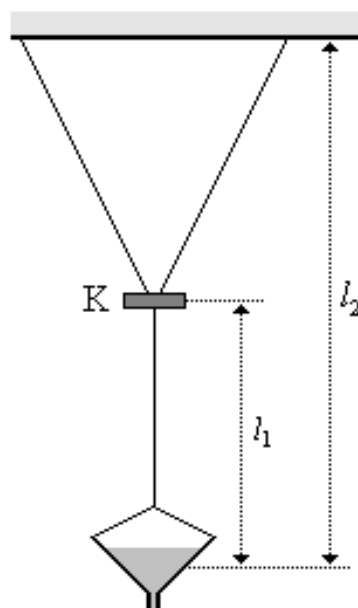
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Na konci závěsu je nádobka s pískem nebo jiným sypkým materiálem. My jsme použili krupici. Konstrukce kyvadla umožňuje měnit poměr délek částí závěsu. Tím lze změnit frekvence, a tedy i výsledný obrazec. Nastavit úplně přesný poměr délek, je ale komplikované, protože při posunu středního kroužku se mění délky obou částí závěsu. Takže pro velmi přesné měření se kyvadlo moc nehodí. Blackburnovo kyvadlo sice umožňuje změnu frekvence kmitů, ale už neumožňuje měnit počáteční fáze kmitů. Vzhledem k tomu, že pohyb začíná vychýlením závěsu, je počáteční fáze obou kmitů  $90^\circ$ . S kyvadlem tedy nejdou zobrazit všechny obrazce.

Naše konstrukce kyvadla byla dostatečně přesná pro vykreslení základních obrazců. Byli jsme limitováni šířkou „čáry“, který vznikala odsypáváním krupice. Při komplikovanějších obrazcích už jednotlivé části křivky splývaly výsledný obrazec byl nezřetelný.



Obr. 1 Naše provedení



Obr. 2 Náčres konstrukce

## 6 Závěr

Podarilo se nám vykreslit skoro všechny obrazce, které nám naše provedení kyvadla umožnilo.

Pokud bychom chtěli vykreslit další obrace museli bychom buď použít osciloskop, nebo počítač. Další možností by byla konstrukce kyvadla s mnohem delším závěsem, které by umožnilo větší rozsah pohybu koncového závaží. Výsledný obrazec by mohl mít větší rozměry a i složitější křivky by se daly rozlišit. Konstrukce rakového kyvadla by sebou ale přinesla další technické problémy – hlavně ukotvení kyvadla v dostatečné výšce nad zemí.



Obr. 3 Obrace získané Blackburnovým kyvadlem

## 7 Reference

- [1] Z. Horák, F. Krupka, *Fyzika – příručka pro vysoké školy technického směru*, SNTL, Praha (1981) 244-247
- [2] J. Reichl, M. Všetická, *Blackburnovo kyvadlo*, <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/28-blackburnovo-kyvadlo>, online 20.11. 2011
- [3] J. Reichl, M. Všetická, *Skládání dvou kolmých kmitů*, <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/180-skladani-dvou-kolmych-kmitu>, online 20.11. 2011