

Problém N těles

F. Batysta*, Š. Timr**

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Břehová 7, 115 19 Praha 1

*batysfra@fjfi.cvut.cz, **timrstep@fjfi.cvut.cz

Abstrakt

V příspěvku jsme se zabývali numerickým řešením problému N těles. Za tím účelem jsme vytvořili program N-Problem, založený na metodě Runge-Kutta a umožňující simulaci pohybu libovolného počtu těles s volitelným časovým krokem. S použitím programu jsme modelovali některé případy pohybu dvou těles, Lagrangeovo a Eulerovo řešení problému tří těles, symetrické řešení se čtyřmi tělesy stejně jako řešení chaotická. Při výpočtu jsme se snažili najít kompromis mezi přesností a výpočetní náročností. Přesnost programu se ukázala jako dobrá, narazili jsme však na některá principiální omezení daná samotnou podstatou užitých metod.

1 Úvod

Problém N těles, tedy úloha o pohybu vzájemně interagujících hmotných bodů, náležel po staletí k největším fyzikálním výzvám. Řešit tuto úlohu znamená určit ze znalosti počátečních podmínek a zákona vzájemného silového působení polohy a rychlosti těles v libovolném okamžiku. Charakter silového působení může být různý, nejčastěji je však míněn pohyb těles podle Newtonova gravitačního zákona.

K úloze lze přistupovat dvojím způsobem: jednak analyticky, tedy řešením soustav pohybových rovnic, nebo numericky za použití výpočetní síly počítačové techniky.

O analytické řešení se pokoušeli mnozí velikáni historie fyziky a matematiky. Řešení problému dvou těles našel sám Newton. Zjistil, že hmotné body se v těžišťové soustavě pohybují po kuželosečkách se společným ohniskem v těžišti.

Problém tří a více těles se však ukázal jako analyticky neřešitelný. Popsány byly pouze některé speciální symetrické případy, například pohyb tří těles ležících na přímce (Euler) nebo ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku (Lagrange).

Na konci 19. století objevil Henri Poincaré chaotická řešení úlohy tří těles, čímž položil základ moderní teorii chaosu.

My jsme se vydali druhým směrem, tedy cestou numerických simulací. Naším cílem bylo vytvořit univerzální program, který by umožňoval modelování pohybu volitelného počtu těles s libovolnými počátečními podmínkami. Jeho funkčnost a praktickou použitelnost jsme hodlali testovat simulacemi některých zajímavých případů. Ze získaných výsledků jsme zamýšleli určit meze přesnosti výpočtu.

2 Metody

Program

Jak již bylo zmíněno, pro simulaci pohybu těles jsme v jazyce Java napsali program nazvaný N-Problem. Program z textového souboru načítá informace o počátečních polohách a rychlostech těles. V závislosti na stanovené délce časového kroku a počtu opakování pak pomocí níže popsaného algoritmu počítá polohy těles v jednotlivých časech a výsledek ukládá

ve formě matice opět do textového souboru. Tato data jsou následně využita v prostředí Matlab, kde probíhá jejich vizualizace. Pro jednoduchost jsme používali relativní délkovou a časovou jednotku, gravitační konstantu jsme pokládali rovnou jedné.

Numerická integrace

Při výpočtu okamžitých poloh a rychlostí těles jsme vycházeli z pohybových rovnic daných Newtonovým gravitačním zákonem, přičemž jsme využili Rungeovu-Kuttovu metodu numerické integrace. Celý cyklus vypadá následovně:

t – počáteční čas, h – časový krok, $\vec{r}_i$ – polohové vektory těles na začátku cyklu,
 $\vec{v}_i$ – rychlosti těles na začátku cyklu

1. Nejprve je vypočteno okamžité zrychlení $\vec{a}_i^{(1)}$ každého tělesa součtem gravitačních příspěvků od ostatních těles podle vzorce

$$\vec{a}_i^{(1)} = G \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)$$

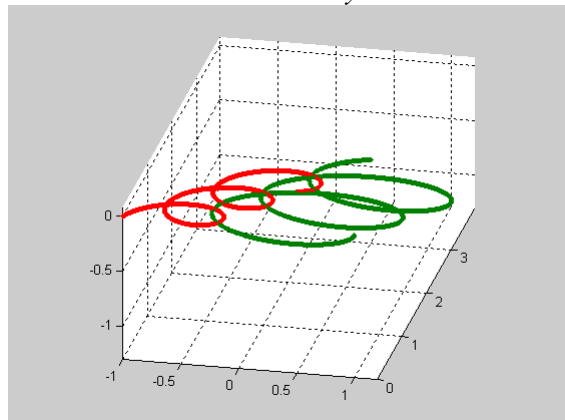
rozloženého do složek, kde $\vec{r}_i$ označuje polohový vektor tělesa, jehož zrychlení je počítáno.

2. V dalším mezikroku probíhá výpočet zrychlení $\vec{a}_i^{(2)}$ stejným vzorcem jako $\vec{a}_i^{(1)}$. Polohové vektory těles se však modifikují vztahem $\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{v}_i \cdot h/2 + \vec{a}_i^{(1)} \cdot h^2/8$.
3. Následuje výpočet zrychlení $\vec{a}_i^{(3)}$ a $\vec{a}_i^{(4)}$ dosazením modifikovaných polohových vektorů $\vec{r}_i'' = \vec{r}_i + \vec{v}_i \cdot h/2 + \vec{a}_i^{(2)} \cdot h^2/8$, respektive $\vec{r}_i''' = \vec{r}_i + \vec{v}_i \cdot h + \vec{a}_i^{(3)} \cdot h^2/2$.
4. V závěru cyklu se pomocí zrychlení $\vec{a}_i^{(1)}$, $\vec{a}_i^{(2)}$, $\vec{a}_i^{(3)}$ a $\vec{a}_i^{(4)}$ stanoví definitivní polohy a rychlosti těles v čase $t = t + h$ jako $\vec{r}_i = \vec{r}_i + \vec{v}_i \cdot h + (\vec{a}_i^{(1)} + \vec{a}_i^{(2)} + \vec{a}_i^{(3)}) \cdot h^2/6$,
 $\vec{v}_i = \vec{v}_i + (\vec{a}_i^{(1)} + 2\vec{a}_i^{(2)} + 2\vec{a}_i^{(3)} + \vec{a}_i^{(4)}) \cdot h/6$. Cyklus se opakuje.

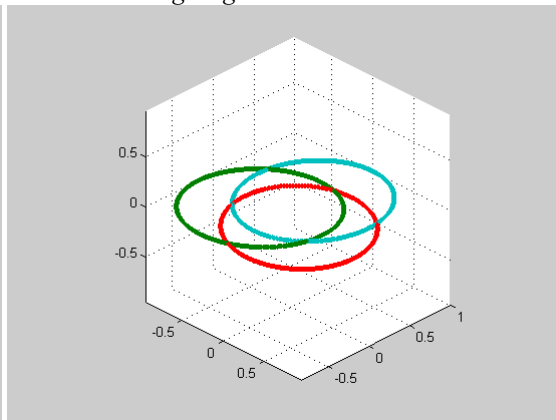
3 Výsledky

Pomocí programu N-Problem jsme numericky ověřili Newtonovo tvrzení, že se planety pohybují po kuželosečkách. Počáteční podmínky jsme volili jednak pro eliptické, jednak pro hyperbolické trajektorie. Při zcela obecném zvolení počátečních podmínek dvou těles (obr. 1) jsme pozorovali superpozici dvou pohybů: translačního pohybu soustavy a pohybu po kuželosečce (v našem případě elipsa). Další simulace probíhaly v těžišťové soustavě. U Eulerova a Lagrangeova (obr. 2) řešení problému tří těles jsme pozorovali značnou numerickou nestabilitu, která znemožňuje jejich výskyt v našem vesmíru.

Obrázek 1 – obecné řešení úlohy dvou těles



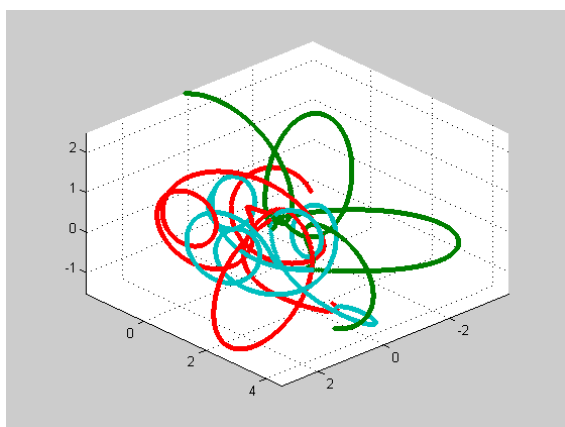
Obrázek 2 – Lagrangeovo řešení



Při počítání úloh více těles jsme využili toho, že náš program dokáže numericky vypočítat i analyticky neřešitelné problémy. Obecné řešení problému tří těles je chaotické, o čemž jsme se přesvědčili simulací s náhodně zvolenými počátečními podmínkami (obr. 3).

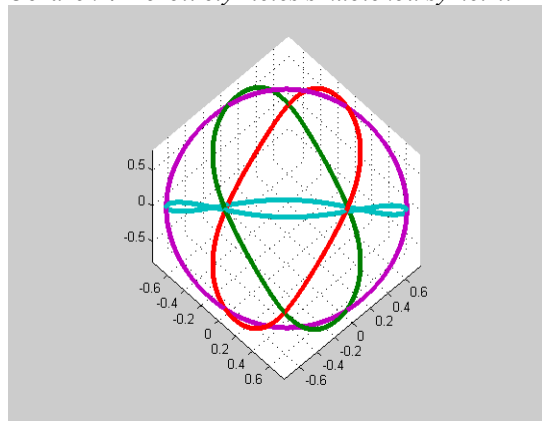
Dále jsme provedli simulaci některých zajímavých periodických řešení více těles, která ke své radosti nacházejí teoretičtí fyzikové. Za všechna uvádíme vizualizaci problému čtyř těles s kubickou symetrií (obr. 4).

Obrázek 3 – chaotické obecné řešení tří těles

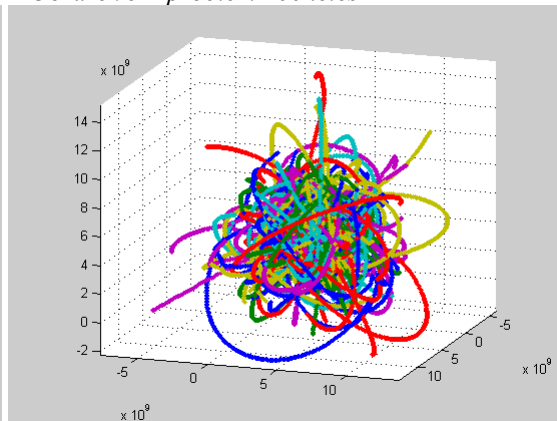


Na závěr jsme prověřili možnosti našeho programu úspěšnou simulací problému 100 těles s náhodně zvolenými počátečními podmínkami. Výpočet problému 100 těles v rozsahu, který můžete vidět na obr. 5, trval přibližně dvacet minut.

Obrázek 4 – orbit čtyř těles s kubickou symetrií



Obrázek 5 – problém 100 těles



4 Diskuze

Jak se ukázalo, program byl schopen simulovat popsané příklady poměrně přesně bez výraznějších nedostatků a hrubých chyb. Zkušebním výpočtem oběhu Země kolem Slunce – na základě zjištěných údajů [5] o hmotnostech těles, vzdálenosti a rychlosti Země v přísluní – jsme dokázali stanovit dobu oběhu s přesností na méně než jedno promile.

Na druhou stranu se projevila i omezení způsobená konečnou přesností numerického výpočtu. Jak bylo naznačeno výše, došlo u některých řešení po jisté době k narušení symetrie pohybu a rozpadu soustavy. Postupnou úpravou časového kroku jsme dospěli k poznatku, že jeho zkracování pod určitou hodnotu, závisující na konkrétní soustavě, nevede k odstranění chyb a zvýšení přesnosti, ale pouze k neúměrnému prodloužení simulace.

Za možné zdokonalení programu do budoucna považujeme implementaci systému automaticky regulujícího délku časového kroku, a tím zvyšujícího efektivitu simulace. K tomu by však bylo nutné odvodit přesná kritéria regulace.

5 Závěr

Program N-Problem se tedy osvědčil jako vhodný nástroj pro simulaci pohybu menšího počtu těles. U větších soustav se projevuje kvadraticky rostoucí náročnost výpočtu. Díky své jednoduchosti může být s drobnými úpravami použit i pro další druhy silového působení a posloužit jako demonstrační nástroj při předvádění nespočtu variant problému N-těles.

Reference

- [1] P. Šedivý, *Modelování pohybů numerickými metodami*, Knihovnička FO č. 38, MAFY, Hradec Králové, 1999
- [2] N-body problem [cit. 2008-11-01], http://en.wikipedia.org/wiki/N-body_problem
- [3] D. L. Ferrario, Symmetric periodic orbits for the n-body problem: some preliminary results [cit. 2008-11-01], http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0208/0208188v1.pdf
- [4] C. Simó, *Periodic orbits of the planar N-body problem with equal masses and all bodies on the same path*, In B. A. Steves, A. J. Maciejewski, *The Restless Universe*, CRC Press, 2001, str. 265-284
- [5] Země [cit. 2008-11-01], <http://cs.wikipedia.org/wiki/Zem%C4%9B>