

# Lissajousovy obrazce

J. Pauk\*, M. Krčmář\*\*

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Břehová 7, 115 19 Praha 1

\*spidi@tiscali.cz, \*\*krci.m@seznam.cz

## Abstrakt

Lissajousovy obrazce jsou esteticky zajímavé křivky, které vznikají z harmonického kmitání. Název dostaly po francouzském fyzikovi Jules-Antoine Lissajousovi, který je představil světu. Lze je velmi dobře popsat matematickými rovnicemi, proto je můžeme také snadno vykreslovat pomocí počítače. Existují však i jiné způsoby, jako Blackburnovo kyvadlo nebo osciloskop. My jsme se pokusili vykreslit je pomocí vlastního mechanického přístroje. Využívány mohou být v laboratořích pro zjišťování neznámých frekvencí.

## 1 Úvod

Lissajousovy obrazce jsou rovinné křivky, které vznikají skládáním dvou harmonických pohybů ve dvou navzájem kolmých přímkách. Tvar takovýchto křivek je jednoznačně zadán poměrem úhlových frekvencí a velikostí počáteční fáze  $\varphi$ . Obecně mohou být tyto křivky uzavřené i otevřené. Z hlediska praktických aplikací jsou zajímavé zejména křivky uzavřené, které vznikají tehdy, pokud je poměrem frekvencí racionální číslo.

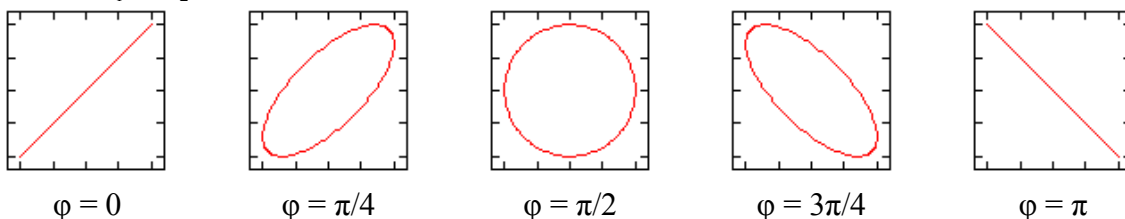
## 2 Matematický základ

Nyní se zaměříme na analytické vyjádření složených kmitů. Ztotožníme-li kmity v jednom směru se směrem osy  $x$  a kmity ve druhém směru se směrem osy  $y$ , lze polohu kmitajícího bodu zapsat pomocí parametrických rovnic:

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t) \quad y = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi) \quad [1]$$

V předchozích vztazích označujeme písmenem  $A_1$  amplitudu kmitů ve směru osy  $x$  a  $A_2$  amplitudu kmitů ve směru osy  $y$ . Dále  $\omega_1$  označuje úhlovou frekvenci kmitů v ose  $x$  a  $\omega_2$  úhlovou frekvenci pro kmity v ose  $y$ . Protože mohou být kmity obecně posunuty o libovolnou fázi, je také nutné ji do úvah zahrnout, fáze je označena jako  $\varphi$ . Proměnná  $t$  v rovnicích označuje čas.

Jednotlivé charakteristiky ovlivňují tvar křivek různým způsobem. Amplitudy určují hranice rozsahu křivek. Celý obrazec bude vždy vepsán do obdélníků o stranách  $2A_1$  a  $2A_2$ . Absolutní velikosti úhlových frekvencí nejsou pro výsledný obrazec podstatné, důležitý je jejich vzájemný poměr. Pokud je tento poměr racionální číslo, budou křivky uzavřené. V opačném případě jsou otevřené a postupně by bod vykreslující křivku prošel všemi body ležícími v daném obdélníku. Čas v rovnicích vystupuje jako parametr, proto výslednou křivku neovlivňuje. Když jej z rovnic vyloučíme, dostaneme rovnici trajektorie. Přesto je však důležitý, protože trajektorie bodu se uzavře po uplynutí periody složených kmitů. Ta se rovná nejmenšímu společnému násobku period obou skládajících se kmitů. Fázový posun ovlivňuje tvar křivek velmi výrazně, ve skutečnosti je však pouze „natáčí“. Význam fázového posunu je zřejmý z obrázku 1, kde je zobrazena nejjednodušší situace, při které je poměr frekvencí roven 1 a  $A_1 = A_2$ .



Obr. 1 Nejjednodušší Lissajousovy obrazce

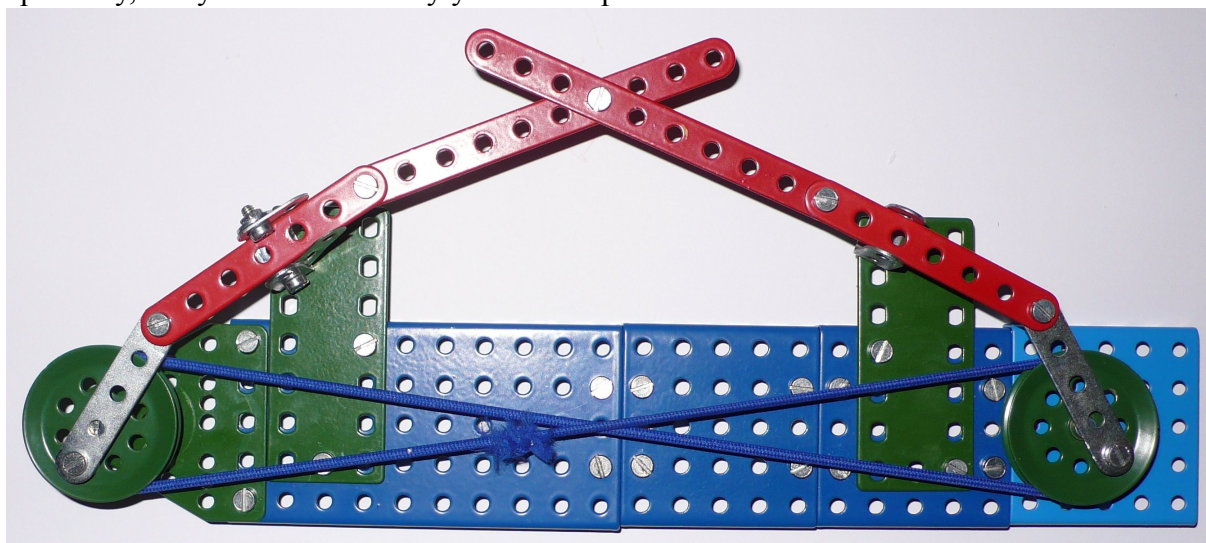
### 3 Zobrazení Lissajousových obrazců

Historicky první konstrukcí, která pomohla ke studiu Lissajousových obrazců, bylo Blackburnovo kyvadlo. Závěs tohoto kyvadla má tvar Y – horní část závěsu je dvojitá a spodní jednoduchá. Kyvadlo lze přibližně považovat za dvě matematická kyvadla s délkami závěsů  $l_1$  a  $l_2$ , kterým odpovídají periody  $T_1$  a  $T_2$ . Na konci závěsu je nádobka s pískem, z níž se rovnoměrně písek odsypává a zaznamenává tak trajektorii pohybu. Největší výhodou tohoto kyvadla je snadná konstrukce, která umožňuje jednoduché sestavení.

Z hlediska praktického uplatnění je nejčastější metodou pro zobrazení osciloskop. V něm jsou vychylovány urychlené elektrony v horizontálním a vertikálním směru pomocí střídavého proudu. Tyto elektrony dopadají na stínítko a vytvářejí tak Lissajousovy obrazce.

Nejsnadnější a nejpřístupnější způsob zobrazení je použití počítače. Největší výhodou u tohoto způsobu je možnost vykreslit i velmi složité obrazce.

My jsme se pokusili zobrazit Lissajousovy obrazce pomocí přístroje sestaveného ze stavebnice Merkur (obrázek 2). Zdrojem harmonického pohybu jsou zde dvě kola, jejichž rotační pohyb je pomocí klikové hřídele převáděn na posuvný pohyb. Volná ramena umožňují hrotu pohybovat se v obou směrech. Amplituda pohybu je pevně dána poloměrem kol. Fázové posunutí bylo možné změnit nastavením vzájemné polohy kol před vykreslováním. Mezi koly byla natažena gumička, která měla zajistit, aby se obě kola pohybovala stejnou úhlovou frekvencí. Jejich poměr byl proto roven 1, což nám umožňovalo vykreslit pouze křivky z obrázku 1. Konstrukce není složitá, přesto se nám ji nepodařilo dostatečně zdokonalit, aby výsledné křivky byly uhlazené a spojité. Největším problémem bylo přesné vedení ramen a druhým problémem bylo prokluzování gumičky při otáčení. Zejména tyto nedostatky způsobily, že výsledné obrazce byly křivé a nepřesné.



Obr. 2 Přístroj pro vykreslování Lissajousových obrazců

### 4 Historie

Tímto problémem se v průběhu 19. století zabývali zejména dva vědci. Prvním z nich byl již v roce 1815 Nathaniel Bowditch, americký matematik a fyzik. Byl první, kdo úlohu řešil. Využíval při tom kyvadlo označované jako Blackburnovo, přestože prvním doloženým konstruktérem byl James Dean. Nezávisle na Bowditchovi se studiem dvou kolmých harmonických kmitů zabýval francouzský fyzik Jules-Antoine Lissajous. Ten svou práci publikoval sice až v roce 1857, ale jeho hlavním přínosem bylo využití světla při zobrazení složených kmitů. Experiment, při němž nechal svazek světla postupně odrazit na dvou zrcadlech a posléze dorazit na stínítko, lze považovat za první realizaci osciloskopu. Pokud byla zrcadla připevněna ke dvěma ladičkám, mohl být touto technikou studován i zvuk.

Veřejnost měla možnost Lissajousovy experimenty zhlédnout roku 1867, kdy je představil na Světové výstavě v Paříži [3].

## 5 Využití

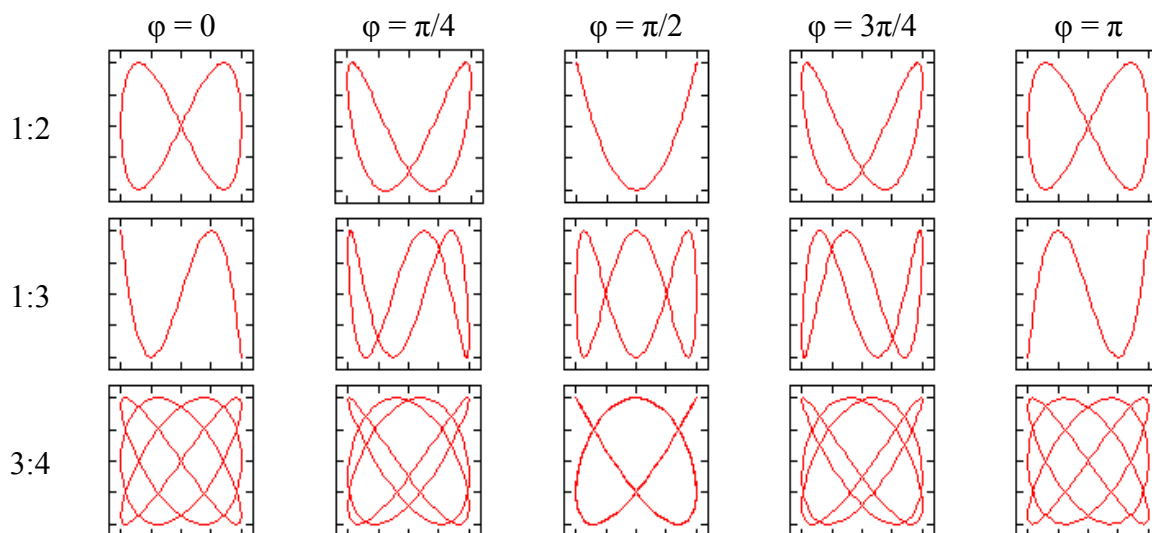
Lissajousovy obrazce lze využít pro určení neznámé frekvence kmitů. Stačí neznámé kmity složit kolmo s kmity o známé frekvenci. V dnešní době mají široké spektrum uplatnění. Při použití vhodných převodníků se s Lissajousovými obrazci setkáme nejen v mechanice, ale také v elektromagnetismu nebo optice při studiu polarizace světla [4]. Praktické využití je spíše v laboratořích, protože pro normální měření jsou tyto metody zbytečně přesné a komplikované, navíc existují levnější, ale méně přesné alternativy. Například bylo ukázáno, jak lze pomocí Lissajousových křivek zpřesnit stanovení koncentrace kyslíku v krvi [3].

## 6 Závěr

Lissajousovy obrazce jsou esteticky zajímavé křivky, které lze díky relativně snadnému matematickému vyjádření lehce simulovat na počítači. Některé obrazce pro vybrané poměry úhlových frekvencí a fázových posunutí jsou na obrázku 3. Přestože mohou být dobře využívány k měření frekvencí, je málo pravděpodobné, že se s touto metodou měření setkáte. My jsme se pokusili vykreslit je pomocí vlastního mechanického přístroje, nicméně s nevelkým úspěchem. Pro lepší výsledky by bylo potřeba buď zpřesnit konstrukci, nebo zvolit jinou metodu, například Blackburnovo kyvadlo.

## Reference

- [1] R. Brepta, L. Půst, F. Turek, *Mechanické kmitání*, Sobotales, Praha, 1994
- [2] J. Reichl, M. Všeticka, *Encyklopedie fyziky*, <http://fyzika.jreichl.com/index.php>, online 19. listopad 2008
- [3] K. Lemr, *Počítačové simulace vybraných fyzikálních jevů*, <http://optics.upol.cz/lemr/java/prace.pdf>, online 19. listopad 2008
- [4] I. Štoll, *Mechanika*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 2003
- [5] D. Koňářík, *Skládání kyvů*, <http://fyzsem.fjfi.cvut.cz/1998-1999/Zima98/proc/lissa/lissa.htm>, online 19. listopad 2008



Obr. 3 Lissajousovy obrazce pro vybrané poměry úhlových frekvencí