Lissajousovy obrazce

Michal Krčmář a Jiří Pauk

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Co to je, jak vznikají?

⇒Lissajousovy obrazce jsou rovinné křivky, které vznikají skládáním dvou harmonických pohybů ve dvou navzájem kolmých přímkách. Tvar takovýchto křivek je jednoznačně zadán poměrem úhlových frekvencí a velikostí počáteční fáze φ. Obecně mohou být tyto křivky uzavřené i otevřené. Z hlediska praktických aplikací jsou zajímavé zejména křivky uzavřené, které vznikají pokud je poměr frekvencí racionální číslo.

Historie

⇒Prvním vědcem, který se zavýval problémem LO, byl v roce 1815 Nathaniel Bowditch. Ke svému studiu používal Blackburnovo kyvadlo (vzhledem k jeho prvenství hovoří některé zdroje o tzv. Bowditchových křivkách)

Jules-Antoinne Lissajous

⇒studiem dvou kolmých harmonických kmitů se zabýval nezývisle na Bowditchovi, svou práci však publikoval až 1857

⇒hlavním přínosem bylo využití světla při zobrazování složených kmitů – při svých experimentech nechával svazek světla postupně odrazit na dvou zrcadlech a posléze dorazit na stínítko

⇒své pokusy představil veřejnosti na Světové výstavě v Paříži roku 1867

Trocha matematiky

⇒skládáme-li dva harmonické pohyby v kolmých směrech, bude výsledný pohyb probíhat po trajektorii dané parametricky jako:

$x=A_1\sin(\omega_1 t)$ $y=A_2\sin(\omega_2 t+\varphi)$

A_1, A_2 ... amplitudy; ω_1, ω_2...úhlové frekvence; t ... čas; φ ... fázový posun

Nejjednodušší příklad

⇒nastává jestliže poměr úhlových frekvencí je roven 1

⇒pokud bude $A_1=A_2$, pak v závislosti na fázovém posunu bude křivka elipsou, která přechází v kružnici (pro $\varphi=\pi/2$) a úsečkou

(pro $\varphi = k\pi$)

⇒ tento příklad popisuje obrázek 1 - 4

⇒ obrazce pro některé vybrané poměry úhlových frekvencí a počátečních fází je na obrázku YZ

Jak jednotlivé charakteristiky ovlivňují tvar křivek?

⇒ *Amplitudy*: určují hranice rozsahu křivek (ty budou vepsány do obdélníku o stranách $2A_1$ a $2A_2$)

⇒ *Úhlové frekvence*: pro tvar křivky nejsou podstatné absolutní velikosti, ale vzájemný poměr. Křivky jsou uzavřené pokud je tento poměr racionální číslo, v opačném případě jsou otevřené.

⇒ *Čas*: neovlivňuje tvar křivky. Pokud jej vyloučíme z parametrických rovnic, dostaneme rovnici trajektorie

⇒ *Fázový posun*: výrazně ovlivňuje tvar křivek (ve skutečnosti je však „pouze natáčí“)

Určení poměru frekvencí z obrazce

⇒pro stanovení poměru vedeme obrazcem dvě přímky tak, že jedna je rovnoběžná s osou x a druhá s osou y, zároveň musí mít maximální možný počet průsečíků s obrazcem

⇒poměr frekvencí se pak rovná poměru průsečíků

⇒vyšší frekvence kmitání náleží v přímce s menším počtem průsečíků

Jak zobrazit Lyssajousovi obrazce?

⇒vykreslení obrazců lze realizovat mnoha způsoby, dále jsou popsány tři ze základních metod

Blackburnovo kyvadlo

⇒historicky první konstrukce, která pomohla ke studiu Lyssajousových obrazců

⇒princip: kyvadlo má horní část závěsu dvojitou, spodní je jednoduchá a k ní je připevněna nádobka naplněná pískem. Kyvadlo lze přibližně považovat za dvě matematická kyvadla s délkami závěsů l_1 a l_2 (těmto délkám odpovídají periody T1 a T2).

⇒výhodou je snadná konstrukce umožňuje jednoduché sestavení takového kyvadla

Osciloskop

⇒z hlediska praktického uplatnění je nejčastěji využívaným zařízením pro zobrazování LO

⇒princip: urychlené elektrony dopadající na stínítko jsou vychylovány horizontálně a vertikálně v elektrickém poli

Počítač

⇒nejsnadnější a nejpřístupnější způsob jak simulovat LO

⇒největší výhodou je velká přesnost a možnost vykreslit i velmi složité obrazce

Využití

⇒Lissajousovy obrazce lze využít pro určení neznámé frekvence kmitů – stačí neznámé kmity složit kolmo s kmity o známé frekvenci

⇒ V dnešní době mají široké spektrum uplatnění. Při použití vhodných převodníků se s Lyssajousovými obrazci setkáme nejen v mechanice, ale také v elektromagnetismu nebo optice při studiu polarizace světla.

⇒ Jeden příklad za všechny: bylo ukázáno jak lze pomocí Lissajousových křivek zpřesnit stanovení koncentrace kyslíku v krvi

⇒ praktické využití je spíše v laboratořích, protože pro normální měření jsou tyto metody zbytečně přesné a komplikovaná a existují levnější, ale méně přesné, alternativy

Literatura

⇒ I. Štoll: Mechanika (2003)

⇒ R. Brepta, L. Půst, F. Turek: Mechanické kmitání (1994)

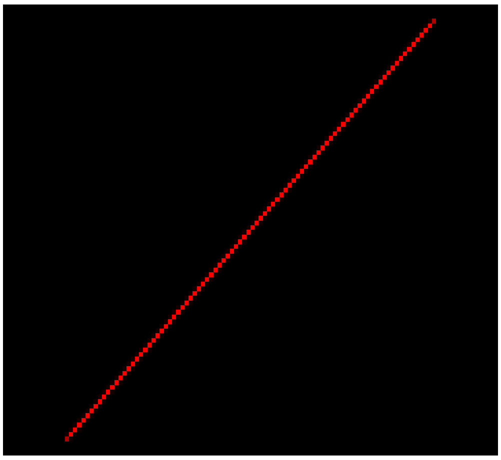
⇒ K. Lemr: Počítačové simulace vybraných fyzikálních jevů (http://optics.upol.cz/lemr/java/prace.pdf, online 19. listopad 2008)

⇒ J. Reichl, M. Všetička: Encyklopedie fyziky (http://fyzika.jreichl.com/index.php online 19. listopad 2008)

D. Koňařík: Skládání kyvů (http://fyzsem.fjfi.cvut.cz/1998-1999/Zima98/proc/lissa/lissa.htm online 19. listopad 2008)

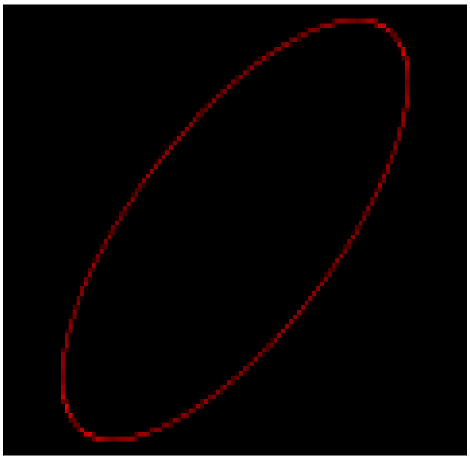
Obrázky

obrázek 1



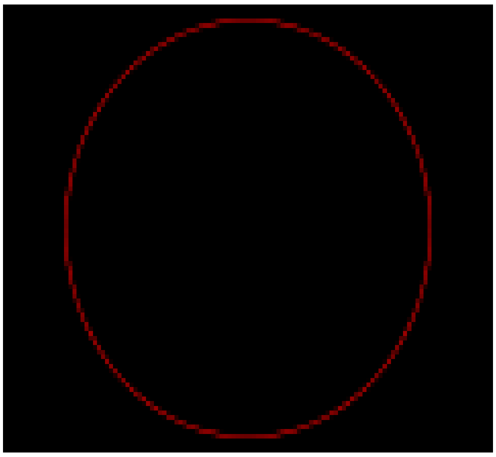
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = 1, \varphi = 0$$

obrázek 2



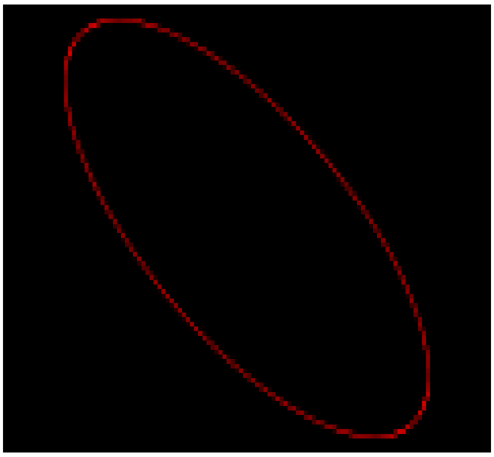
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = 1, \varphi = \frac{\pi}{4}$$

obrázek 3

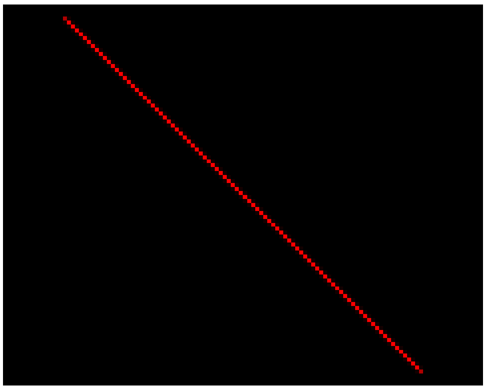


$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = 1, \varphi = \frac{\pi}{2}$$

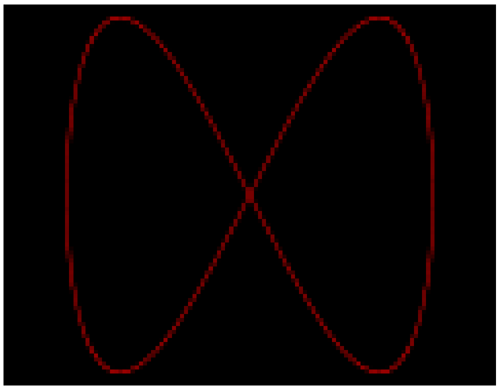
obrázek 4



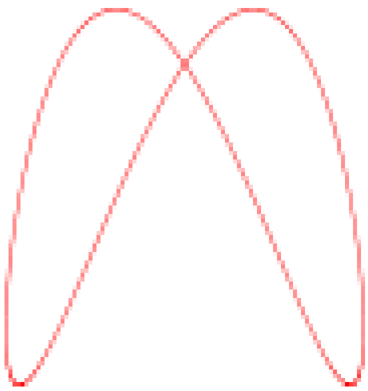
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = 1, \varphi = \frac{3\pi}{4}$$



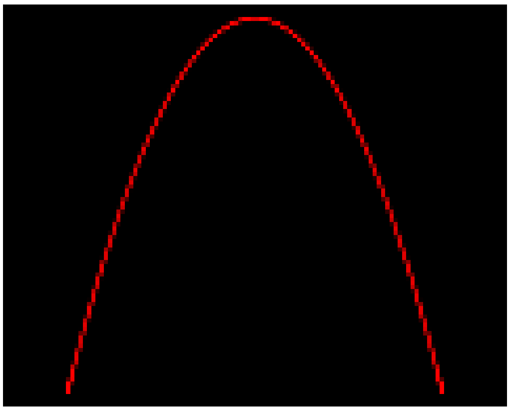
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = 1, \varphi = \pi$$



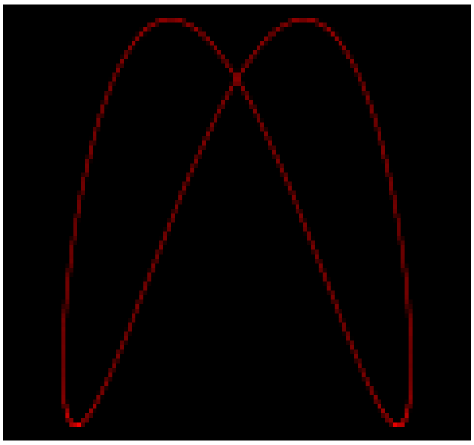
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}, \varphi = 0$$



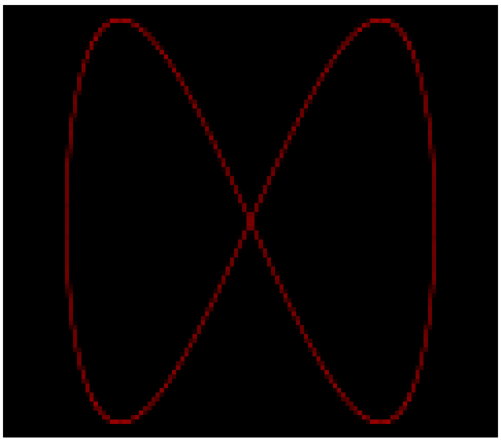
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}$$



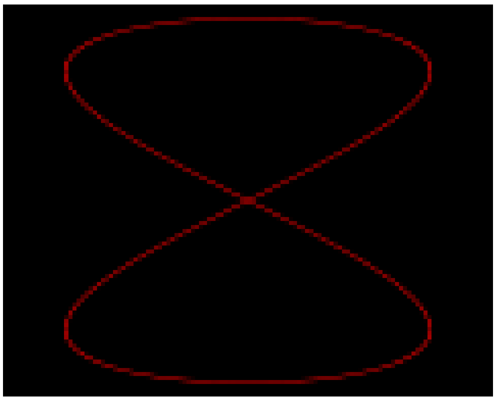
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}, \varphi = \frac{\pi}{2}$$



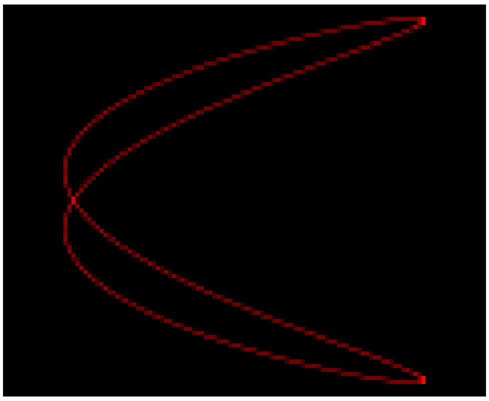
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}, \varphi = \frac{3\pi}{4}$$



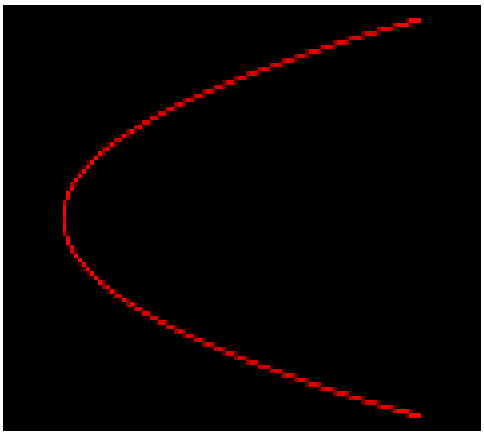
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}, \varphi = \pi$$



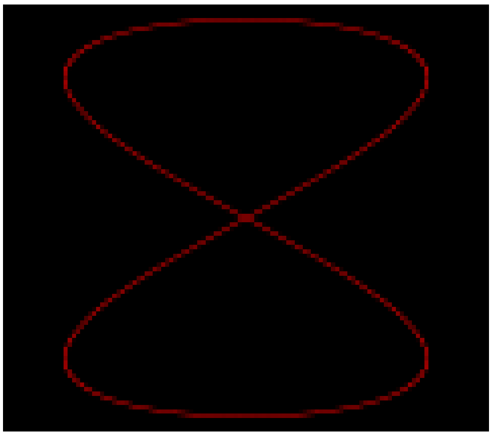
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{1}, \varphi = 0$$



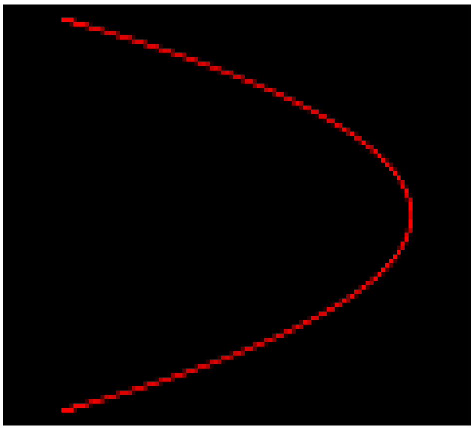
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{1}, \varphi = \frac{\pi}{5}$$



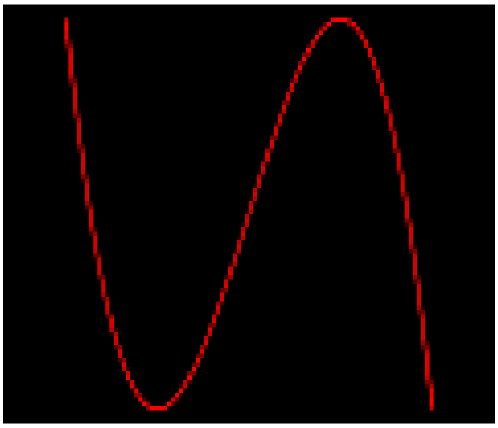
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{1}, \varphi = \frac{\pi}{4}$$



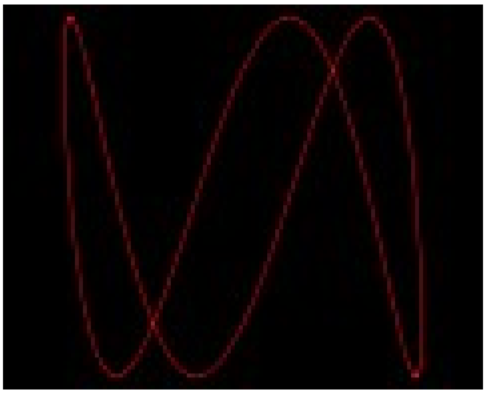
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{1}, \varphi = \frac{\pi}{2}$$



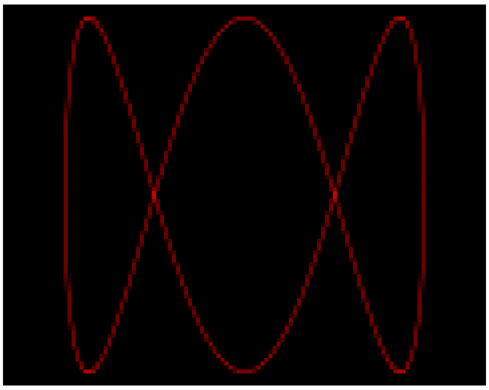
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{1}, \varphi = \frac{3\pi}{4}$$



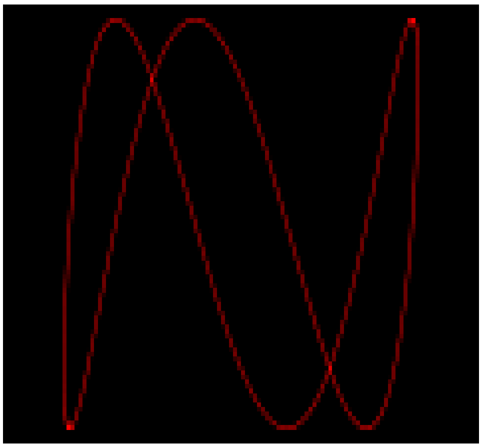
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{3}, \varphi = 0$$



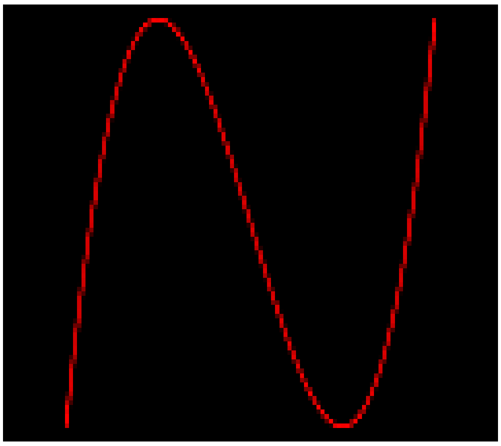
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{3}, \varphi = \frac{\pi}{4}$$



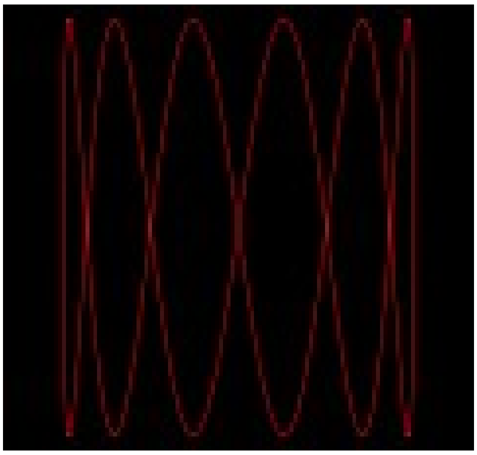
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{3}, \varphi = \frac{\pi}{2}$$



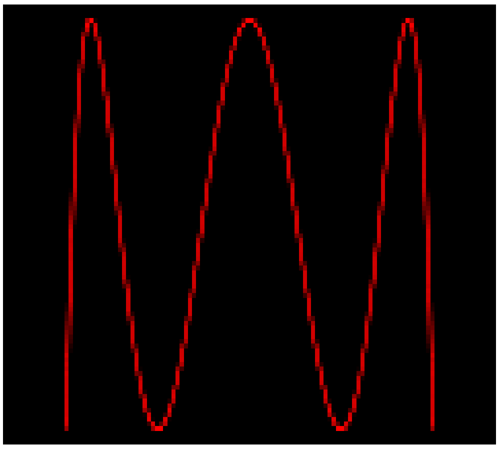
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{3}, \varphi = \frac{3\pi}{4}$$



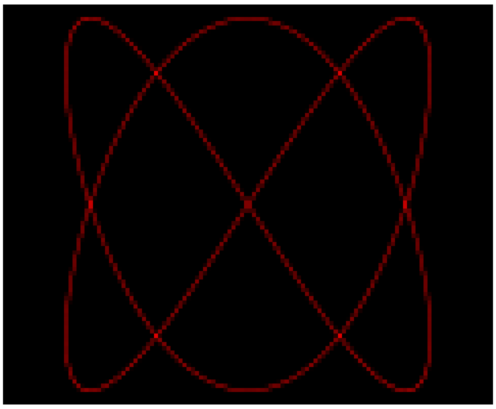
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{3}, \varphi = \pi$$



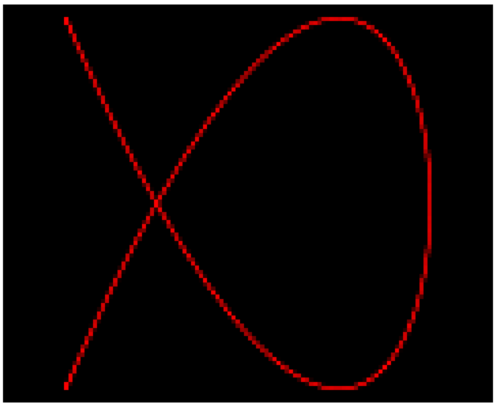
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{6}, \varphi = 0$$



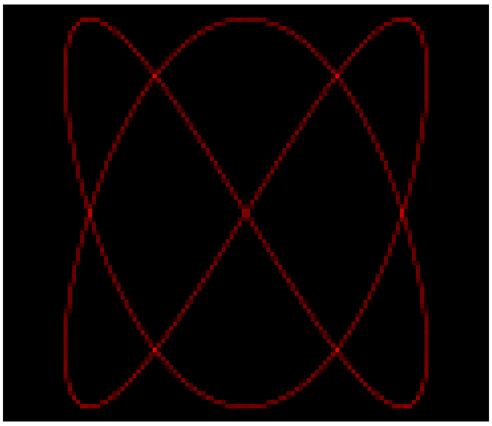
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{6}, \varphi = \frac{\pi}{2}$$



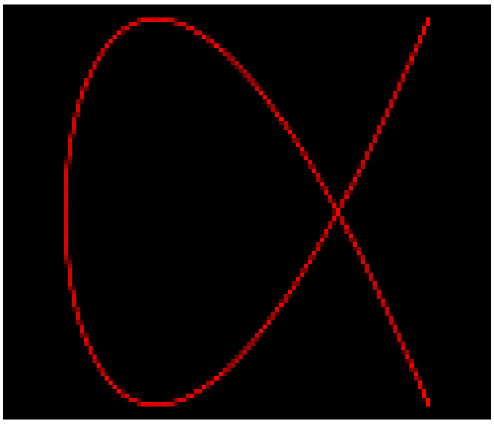
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{3}, \varphi = 0$$



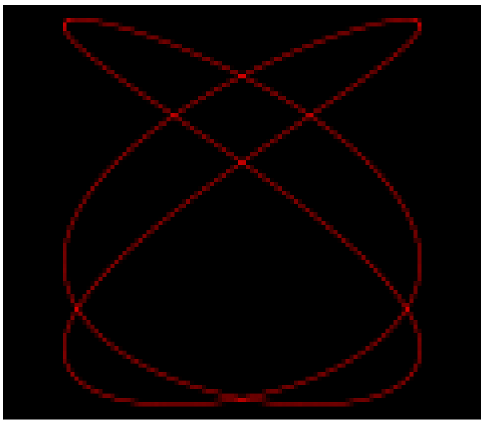
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{3}, \varphi = \frac{\pi}{4}$$



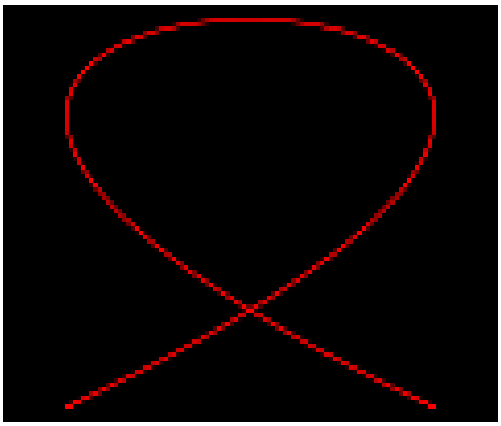
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{3}, \varphi = \frac{\pi}{2}$$



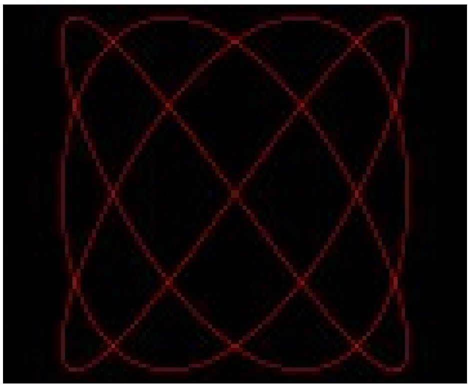
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{3}, \varphi = \frac{3\pi}{4}$$



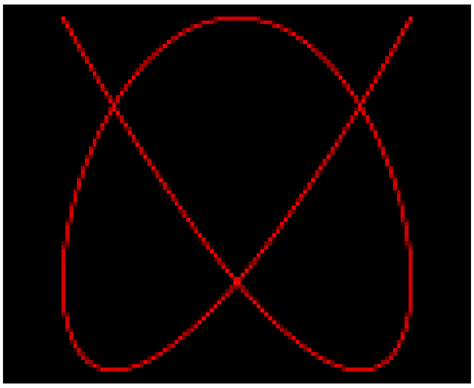
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}$$



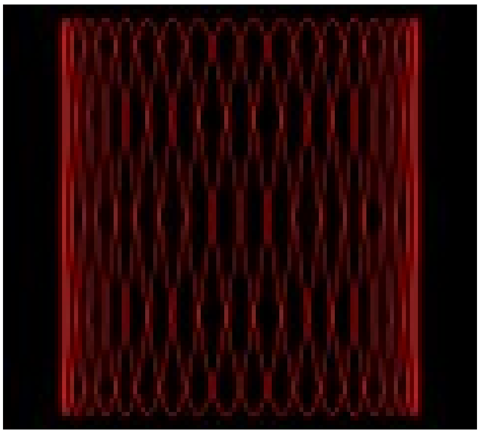
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{2}, \varphi = \frac{\pi}{2}$$



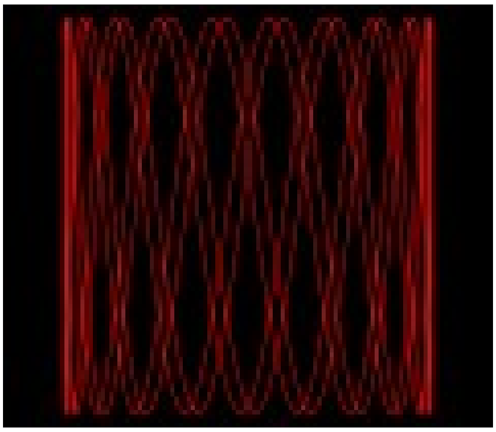
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{4}, \varphi = 0$$



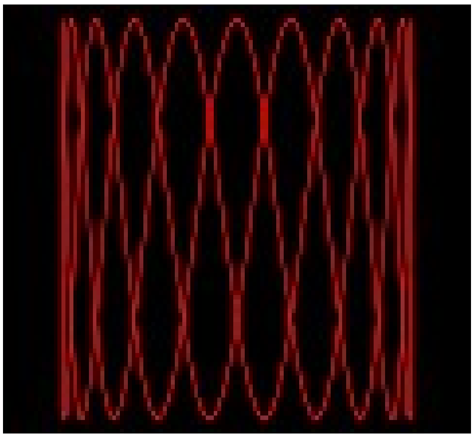
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{4}, \varphi = \frac{\pi}{2}$$



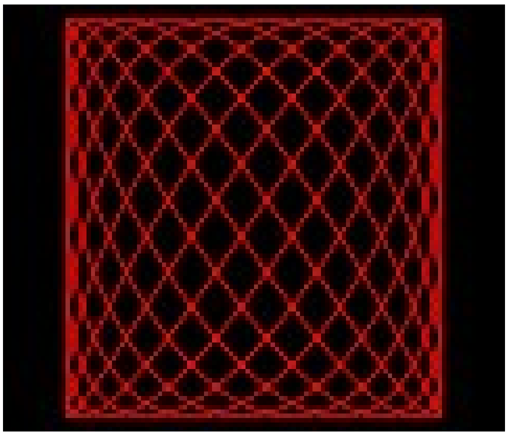
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{20}, \varphi = 0$$



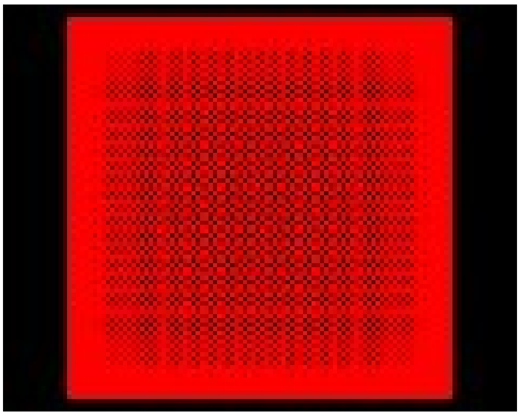
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{20}, \varphi = \frac{\pi}{4}$$



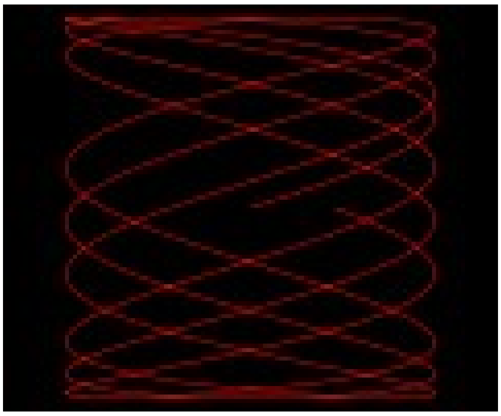
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{20}, \varphi = \frac{\pi}{2}$$



$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{17}{23}, \varphi = 0$$

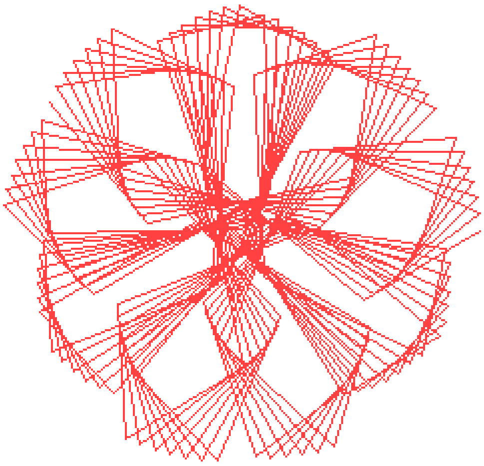


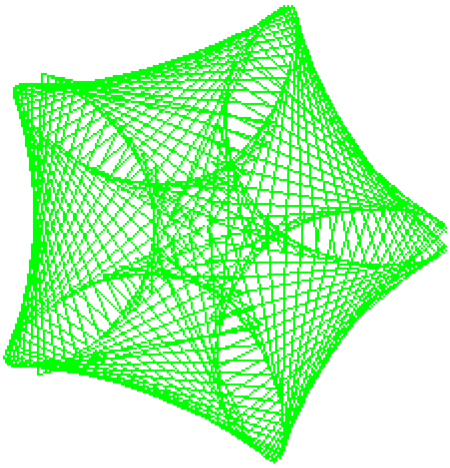
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{97}{101}, \varphi = 0$$

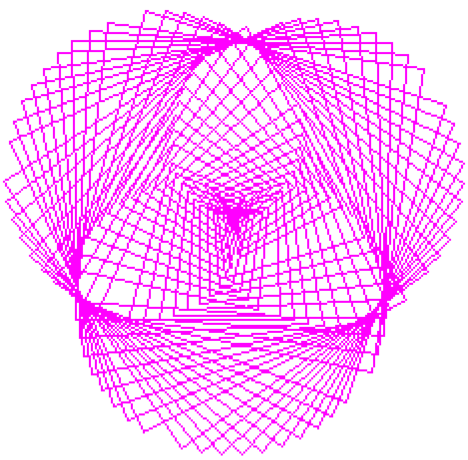


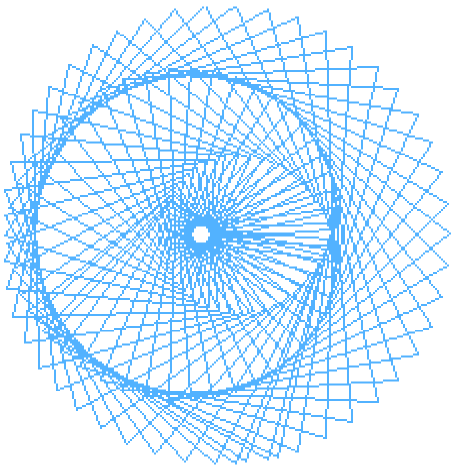
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\pi}{1}, \varphi = 0$$

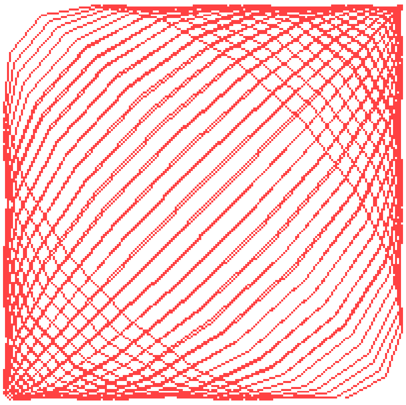
Trochu složitější případy

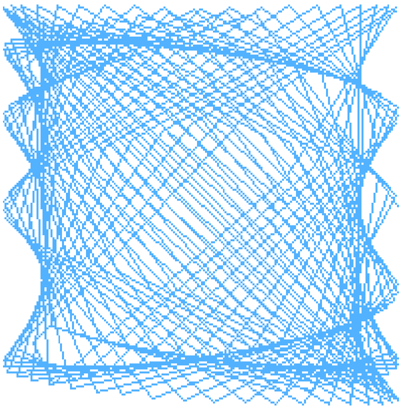




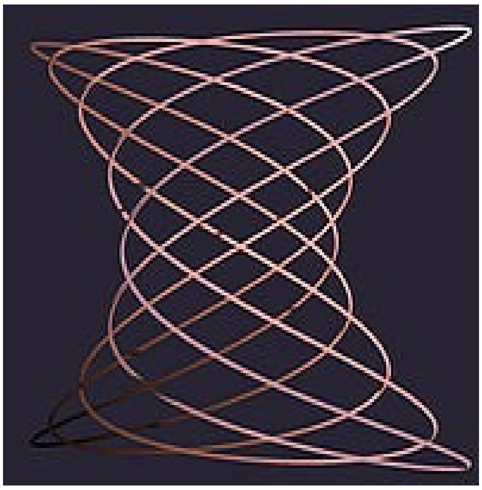


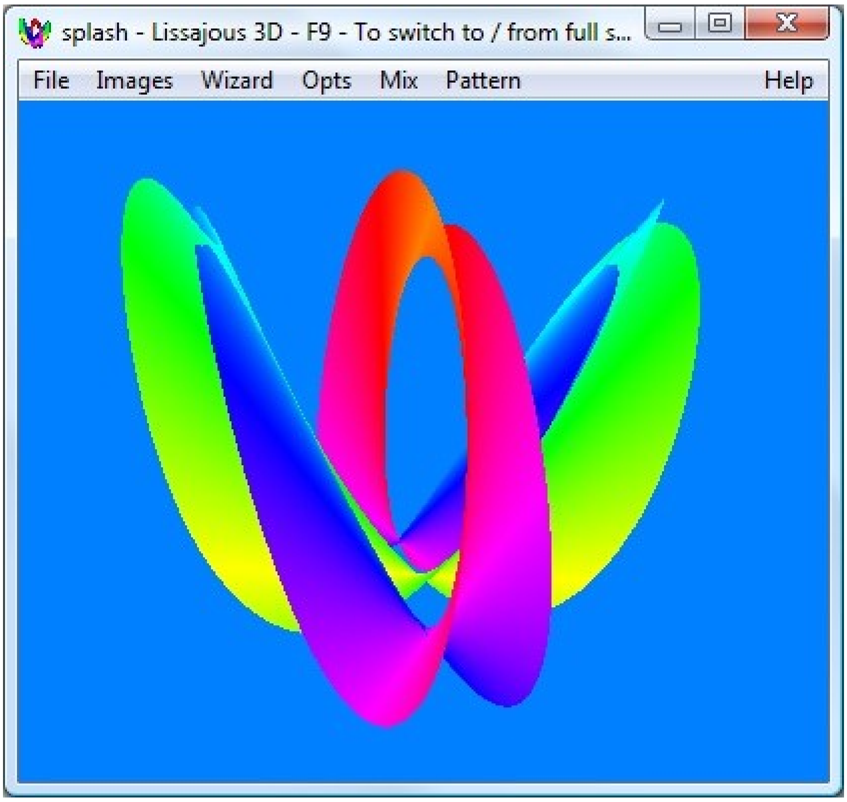




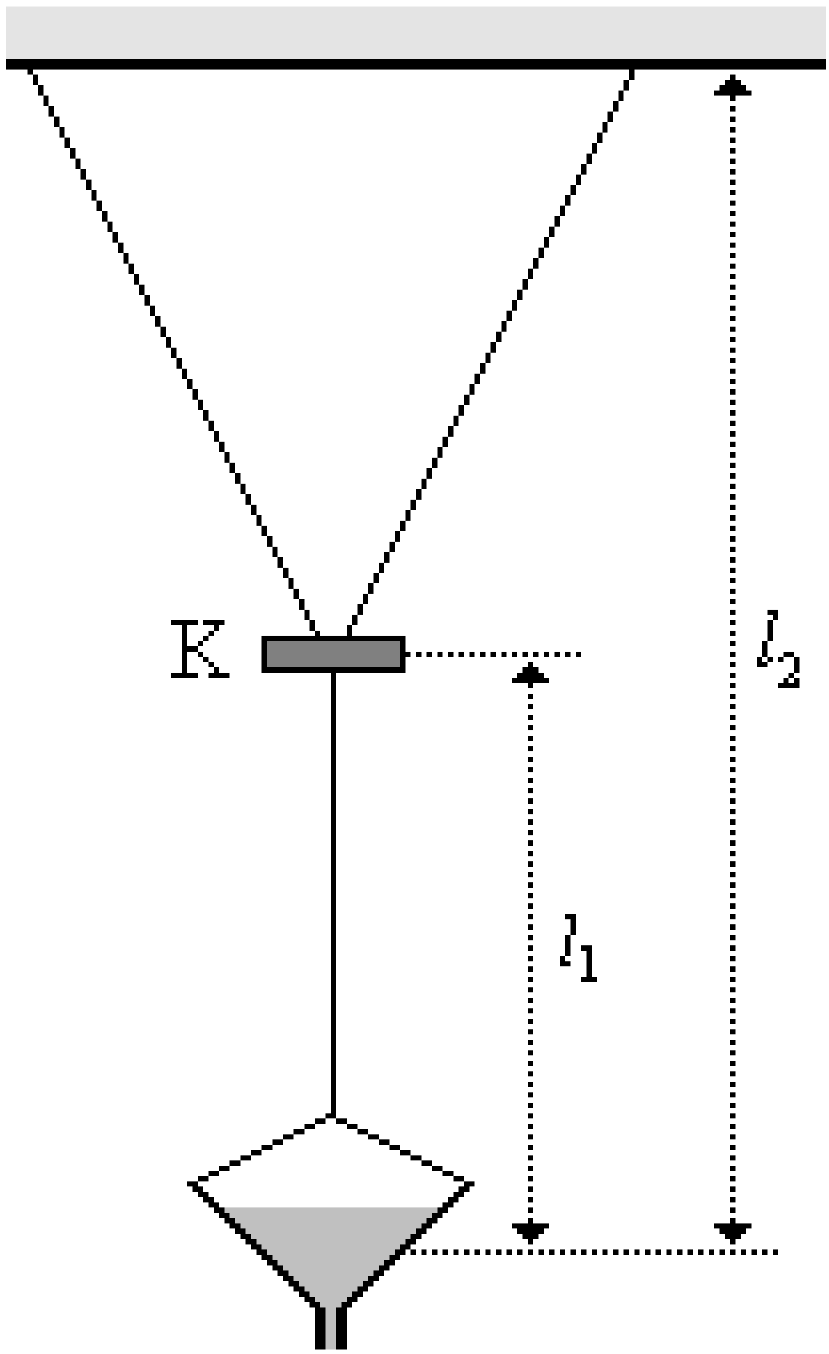


Lisajousovi obrazce ve 3D

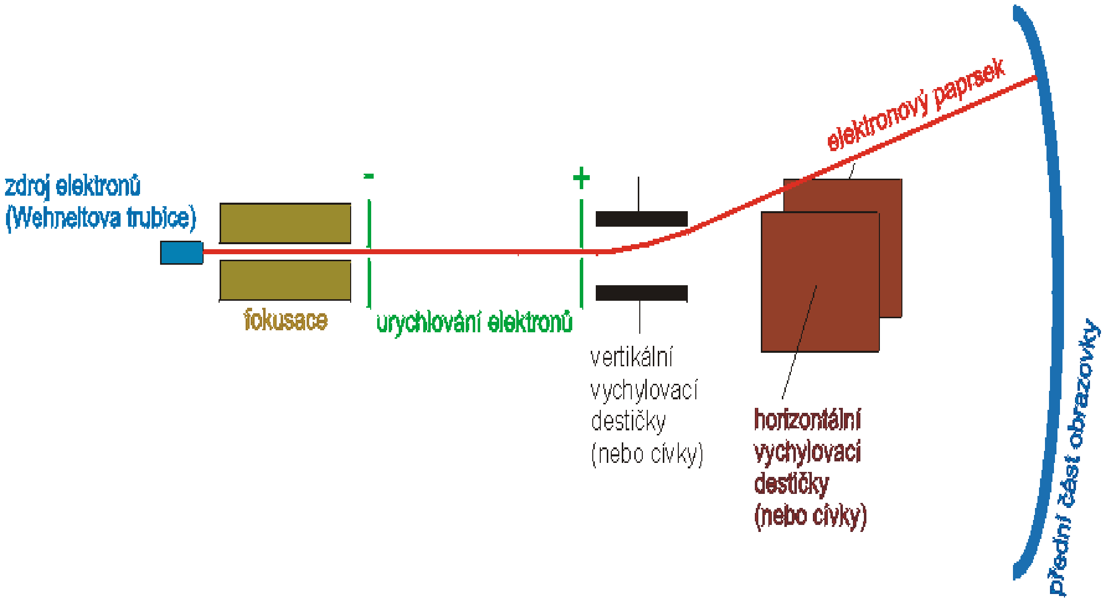




Blacbournovo kyvadlo



Osciloskop



zdroj elektronů
(Wehneltova trubice)
fokusace
-
+
urychlování elektronů
vertikální
vychylovací
destičky
(nebo cívky)
horizontální
vychylovací
destičky
(nebo cívky)
elektronový paprsek
přední část obrazovky