Obrázková matematika

D. Šafránek
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Břehová 7, 115 19 Praha 1
d.safranek@seznam.cz

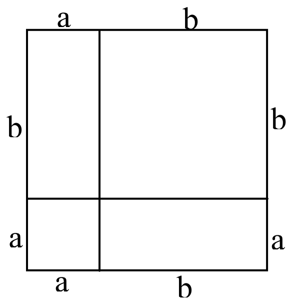
Abstrakt
Názorná odvození základních geometrických vět známých ze střední školy.

1 Úvod

Na střední škole se mechanicky používají vzorečky, věty, které vám kantoři mnohdy ani neobtěžují vysvětlit. Jak víte, že tyto vzorečky fungují? Neučili jste se je celé ty čtyři roky odříkat zpaměti zbytečně? Já kantorům nevěřil. Počal jsem pátrat, kde se vzorečky vzaly, ověřoval jsem si, že věty skutečně platí, snažil jsem se je odvodit bez zavedení limit, nekonečných řad či imaginárních jednotek. Čistě geometricky. Výsledek svého pátrání Vám zde nyní předkládám.

2 Vztah $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Jak víte, že pravidlo „každý s každým" skutečně platí? Nebyl by vzoreček hezčí bez té dvojky uprostřed? Nakreslíme si obrázek.



Obsah čtverce lze vyjádřit dvěma způsoby:
jako násobek stran

$$S = (a+b)^2,$$

jako součet ploch čtverce o hraně *a*, čtverce o hraně *b* a dvou obdélníků

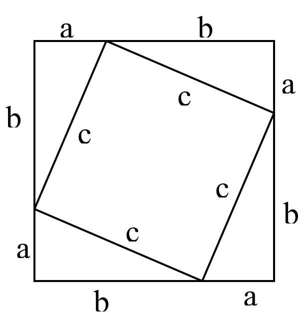
$$S = a^2 + 2ab + b^2,$$

tedy

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

3 Pythagorova věta

Snad nejznámější i nejstarší matematická věta vůbec, nezbytná pro výpočty třetích stran v pravoúhlých trojúhelnících. Odvodíme ji podobným způsobem.



$$S = (a+b)^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + c^2,$$

z předchozí věty

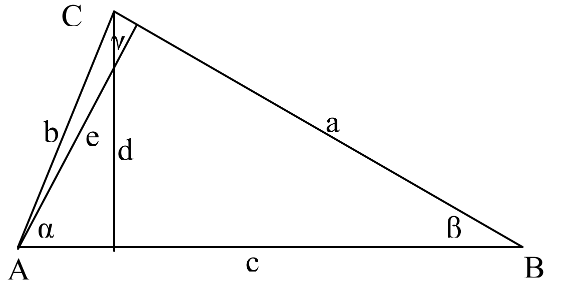
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \qquad /-2ab,$$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

4 Sinová věta

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

Ukazuje vztahy mezi úhly a délkou stran. Použitelná hlavně v geometrii.



Začneme úvahou. Sinová věta se jmenuje sinová protože je v ní sinus. Vyjádříme si tedy sinus. Třeba úhlu alfa.

$$\sin\alpha=\frac{d}{b}$$

Víme, že sinová věta nám dává do poměru siny úhlů a délky stran libovolného trojúhelníka. Hodnotu *d* neznáme, budeme si ho tedy muset vyjádřit. Víme, že

$$\sin\beta=\frac{d}{a},$$

odkud

$$d=a\sin\beta=b\sin\alpha \qquad /:a,:b,$$

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}.$$

Máme tedy jednu část tvrzení, zbytek dokážeme podobně.

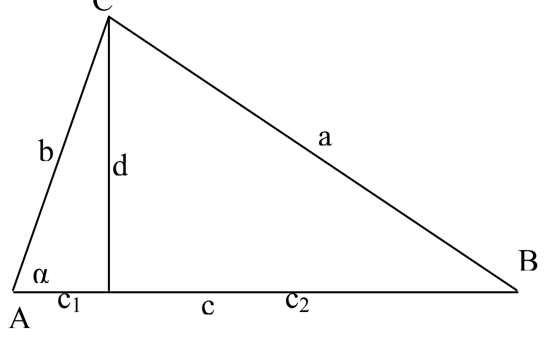
$$e=c\sin\beta=b\sin\gamma \qquad /:c,:b,$$

odkud $$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}.$$

5 Kosinová věta

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

Kosinová věta je mnohem používanější než věta sinová, nejen v geometrii, matematice, ale i ve fyzice. Dalo by se ji říkat zobecněná Pythagorova věta (pro alfa rovno devadesát stupňů se v ni mění).



Kosinová věta se jmenuje Kosinová, protože je v ní kosinus. Vyjádřeme si ho. Označme c_1 tak, že

$$c=c_1+c_2$$

a

$$\cos\alpha=\frac{c_1}{b}.$$

Musíme vyjádřit c_1. Když se nám podaří dát do souvislosti c_1 a c_2, dokážeme ze vztahu $c = c_1 + c_2$ vyjádřit c_2, dosadit ho do naší rovnice a vyjádřit c_1 (musíme získat 2 rovnice o dvou neznámých, abychom neznámé mohli jednoznačně vyjádřit).

Použijeme Pythagorovu větu:

$$d^2 = b^2 - c_1^2 = a^2 - c_2^2,$$

dosadíme $c_2 = c - c_1$

$$b^2 - c_1^2 = a^2 - (c - c_1)^2,$$

z první věty (za B dosadíme $-c_1$) víme

$$b^2 - c_1^2 = a^2 - \left(c^2 - 2cc_1 + c_1^2\right),$$

$$b^2 - c_1^2 = a^2 - c^2 + 2cc_1 - c_1^2 \quad /+ c_1^2,$$

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cc_1.$$

Vyjádříme c_1 a dosadíme do $\cos\alpha = \frac{c_1}{b}$,

$$\cos\alpha = \frac{\frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}}{b} \quad /2bc,$$

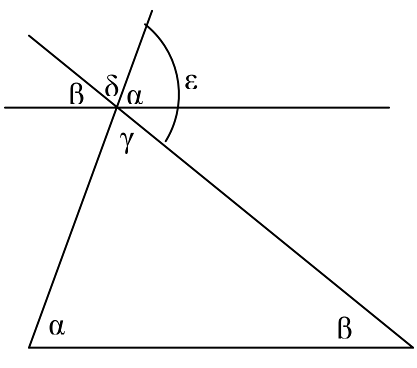
$$2bc\cos\alpha = b^2 - a^2 + c^2,$$

odkud dostáváme hledaný vztah

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

6 Součet všech úhlů v trojúhelníku = 180°

Tohle jste už určitě někde slyšeli. Ale určitě je to pravda? Pro roviny snad.



Z podobnosti (rovnoběžnosti přímek) plyne, že alfa i beta jsou i „tam nahoře“. Stačí ověřit, že $\delta = \gamma$.

Víme, že

$$\delta + \varepsilon = 180°,$$

ale ε se dá také vyjádřit jako

$$\varepsilon = 180° - \gamma,$$

tedy

$$\delta + 180° - \gamma = 180°,$$

odkud

$$\delta = \gamma,$$

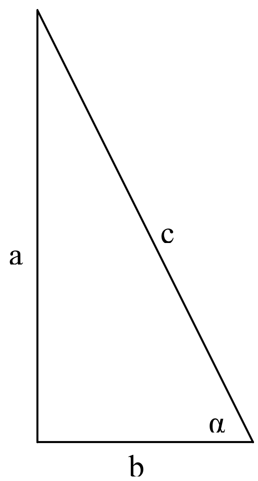
nyní je již vidět, že

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

7 Vztah mezi sinem a kosinem

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Vzoreček, díky němuž ze sinu uděláme kosinus, z kosinu sinus, z tangens cokoliv budeme chtít.



Vyjdeme z Pythagorovy věty

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

vydělíme kvadrátem přepony

$$1 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2},$$

když se násobí zlomky, násobí se čitatel s čitatelem, jmenovatel se jmenovatelem a proto

$$1 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2,$$

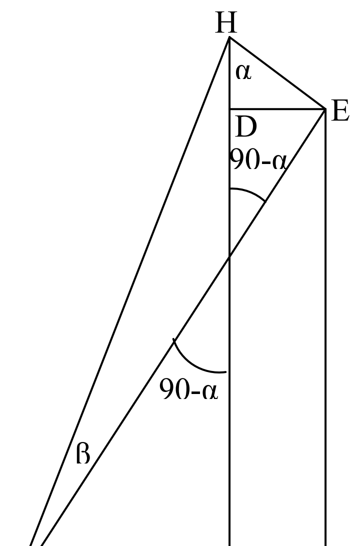
z obrázku

$$1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \text{ .}$$

8 Součtový vzorec pro sinus

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

Patří do základní výbavy každého zkušenějšího matematika.



Všechny úsečky budu pro přehlednost psát bez absolutních hodnot. Již víme, že součet všech úhlů v trojúhelníku dá 180º. Postupně se dostaneme k tomu, že *úhel DHE* je roven *α*.

1. Vyjádříme *sin(α + β).*
2. Vyjádříme *BH.*
3. Roztrhneme zlomek.
4. *BD* má stejnou velikost jako *CE*, můžeme ho tedy nahradit.
5. Vynásobíme „chytrými“ jedničkami (první výraz rozšíříme *AE*, druhý *EH*).
6. Přeskupíme.
7. Pomocí obrázku se dostaneme k cíli.

$$\sin(\alpha+\beta) \overset{\mathbf{1}}{=} \frac{BH}{AH} \overset{\mathbf{2}}{=} \frac{BD+DH}{AH} \overset{\mathbf{3}}{=} \frac{BD}{AH} + \frac{DH}{AH} \overset{\mathbf{4}}{=} \frac{CE}{AH} + \frac{DH}{AH} \overset{\mathbf{5}}{=} \frac{CE}{AH}\frac{AE}{AE} + \frac{DH}{AH}\frac{EH}{EH} \overset{\mathbf{6}}{=}$$

$$= \frac{CE}{AE}\frac{AE}{AH} + \frac{DH}{EH}\frac{EH}{AH} \overset{\mathbf{7}}{=} \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

9 Součtový vzorec pro kosinus

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Odvození bude shodné s předchozí větou, budeme využívat tentýž obrázek. Tedy nyní již bez komentáře.

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{AB}{AH} = \frac{AC-BC}{AH} = \frac{AC}{AH} - \frac{BC}{AH} = \frac{AC}{AH} - \frac{DE}{AH} = \frac{AC}{AH}\frac{AE}{AE} - \frac{DE}{AH}\frac{EH}{EH} =$$

$$= \frac{AC}{AE}\frac{AE}{AH} - \frac{DE}{EH}\frac{EH}{AH} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

10 Závěrem

A to je vše, co Vám dnes ukážu. Možná jste si všimli, že důkazy jsou velmi omezené. Například obě součtové věty jsou dokázány pouze pro kladné úhly se součtem do devadesáti stupňů. Pro důkazy dalších částí by se musely namalovat jiné obrázky, dodefinovat, co je sinus, kosinus záporných úhlů. V nekonečných řadách to vše sfouknete naráz. V čem však geometrická metoda triumfuje, je přehlednost a názornost. Doufám, že jste se dobře pobavili.

Reference

[1] kol. autorů, Pythagorova věta, http://cs.wikipedia.org/wiki/Pythagorova_věta