Teorie náhodné procházky a její ověření

A. Hoskovec*, M. Hlaváč**
FJFI ČVUT, Břehová 7, 115 19 Praha 1
a.hoskovec@gmail.com*, martin_hlavac@seznam.cz**

Abstrakt:

Příspěvek se zabývá tzv. teorií náhodné procházky a jejím praktickým ověřením takovým způsobem, aby čtenáře zaujal a jednoduchou formou mu přiblížil teorii pravděpodobnosti a princip náhody, které ve fyzice, hlavně termodynamice a kvantové fyzice, hrají nezastupitelnou roli. Při jeho psaní a provádění pokusů jsme vycházeli z Feynmanových přednášek z fyziky, avšak abychom se obsahově vešli do povoleného rozsahu, museli jsme hodně látky zjednodušit. Oba experimenty nakonec potvrdily teorii velmi působivým způsobem.

1 Pravděpodobnost a náhodná procházka

Pravděpodobnost – co si pod tímto slovem představit? V běžném životě se neustále snažíme předpovídat výsledek v mnoha a mnoha situacích. Například známe-li důkladně jízdní řád a všechny okolnosti ovlivňující jízdu autobusu, snadno odhadneme, že autobus bude na zastávce v některém okamžiku a náš odhad je bezpečný a jednoduchý. Pokud se ale pokusíme odhadnout např. výsledek hodu mincí, už nám do smíchu tolik nebude – výsledek (pokud je neovlivnitelný), uhádnout pokaždé dost dobře nelze a vyplatí se nám hovořit o tzv. pravděpodobnosti (že padne hlava či orel), která poskytuje třebaže částečné informace o výsledku. Pravděpodobnost nějakého výsledku experimentu A zavedeme jako podíl všech možností, které dávají náš výsledek N_A a celkového počtu všech možností, které můžou nastat N.

$$P(A) = N_A/N$$

Je důležité poznamenat, že možnosti průběhu experimentu jsou vzájemně rovnocenné, tzv. je stejná pravděpodobnost, že nastane kterákoli z nich. A počty možností vyjadřují naše informace o pokusu. To co se snažíme pravděpodobností vyjádřit je náš nejlepší odhad toho, nakolik je možné, že se vše stane, jak chceme. Přičemž neočekáváme přesnou shodu s odhadem, ten není zaručený, ale pouze přiblížení při velkém počtu opakování experimentu.
Náhodná procházka – pro jednoduchou ilustraci náhodné procházky si představme, že náš pohyb je nějak omezen pouze na pohyb po jedné přímce, vlevo či vpravo – např. pohyb po kolejnici, přičemž místo začátku pohybu si označíme jako počátek naší osy souřadné a směr vpravo jako kladný. Dále si představme, že když uděláme krok libovolným směrem, jeho délka je neměnná, konstantní, např. vždy uděláme krok od jednoho pražce k druhému, řekněme, že pražec je naše nová jednotka délky, potom délka kroku = 1. To, jestli uděláme krok směrem vlevo nebo vpravo rozhodneme mincí (nebo nějakou jinou náhodou s pouze dvěma rovnocennými výsledky) – např. hlava = doprava, orel = doleva. Takže vždy, než uděláme

krok, hodíme si mincí, a podle výsledku se pohneme. Vyvstává otázka, kde se budeme nacházet po N hodech a N krocích? Jaká je naše *nejpravděpodobnější* poloha?

2 Odpovědi - házení mincí a simulace

Nejprve si odpovíme teoreticky. Pro náš odhad je výhodnější pracovat s druhou mocninou ušlé vzdálenosti, označíme D^2. Je jasné, že po prvním hodu, je $D^2 = 1$, pracujeme beztrestně bez jednotek, neboť ty jsme zvolili tak, aby délka kroku = 1, čtenář může kdykoli jednotky zpět dosadit. Při dalším hodu se buď pohneme doleva, nebo doprava – vzdálenost D od počátku vzroste nebo klesne o 1. Takto budeme pokračovat N-krát. Dá se říct, že pokud jsme se po N-1 hodech nacházeli ve vzdálenosti D_{N-1}, po dalším hodu bude naše vzdálenost rovna jedné z následujících možností $D_N = D_{N-1} - 1$ nebo $D_N = D_{N-1} + 1$. Pro D_N^2:

$$D_N^2 = D_{N-1}^2 - 2D_{N-1} + 1$$

$$D_N^2 = D_{N-1}^2 + 2D_{N-1} + 1$$

Takže průměrně $D_N^2 = D_{N-1}^2 + 1$. A protože po prvním hodu bylo $D^2 = 1$, musí platit:

$$|D_N| = \sqrt{N}$$

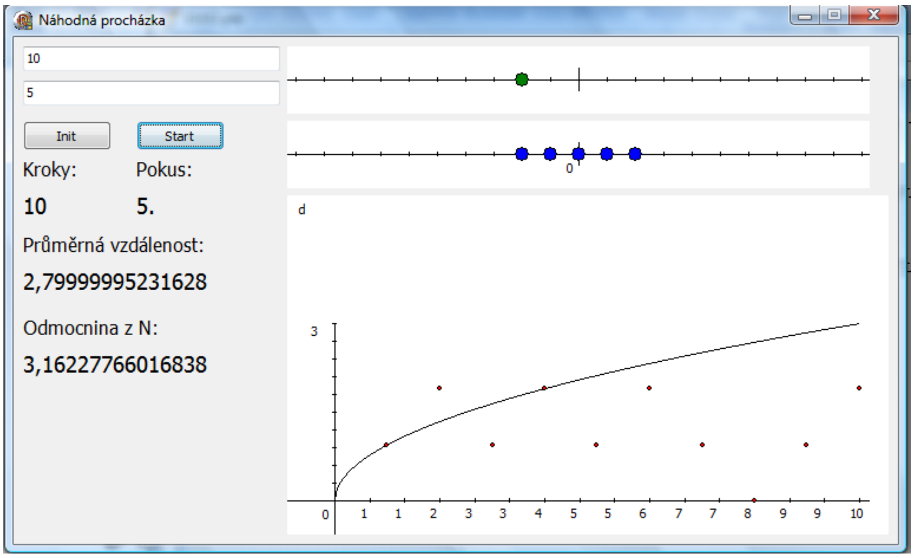
To je ale úžasný výsledek, říká nám, že nejpravděpodobnější místo výskytu po N hodech je v plus mínus odmocnině z N! Obdobným trikem se dá dokázat, že vztah platí i pro procházku s proměnnou délkou kroku. Pokud procházku provádíme ve 3 směrech, dá se říci, že se náhodně pohybujeme v prostoru a můžeme tak popsat např. pohyb molekuly plynu, která naráží do ostatních molekul.

Nyní k ověření – jednak jsme požádali dobrovolníka, aby házel mincí, a na tabuli jsme vždy zakreslili naši novou polohu na přímce. Výsledek 10-ti hodů:

počet hlav: 3; počet orlů: 7

Tedy naše vzdálenost od počátku = |-4| = 4, srovnáme s výsledkem nejpravděpodobnějších poloh. $\sqrt{N} = \sqrt{10} = 3{,}16$ a |-4|=4. Tedy téměř shoda, za odchýlení je zodpovědná fluktuace.

Dále jsme k ověření vytvořili program, který náhodně generoval jakoby hody mincí a naši aktuální polohu vždy zanesl do grafů. Simulace má tu výhodu, že můžeme nasimulovat daleko větší množství hodů při nízké námaze. Program a výsledek 5x deseti hodů vypadal takto:



Obrázek 1: počítačová simulace

Vidíme, že po 5-ti opakováních 10 kroků byla naše průměrná vzdálenost 2,8, přičemž odmocnina z 10 je 3,2. Dalo by se očekávat, že po dalších opakováních procházky by se průměrná dosažená vzdálenost blížila odmocnině z 10. Ostatně to naše další simulace potvrdily. Nelze to ovšem tvrdit se 100% jistotou, neboť to kde skončíme je jen a jen náhoda. K vysvětlení jednotlivých částí programu… Do nejvrchnějšího grafu se zanáší zeleně naše aktuální poloha. Do grafu pod ním modře všechny navštívené polohy. A do největšího z grafů se zanáší absolutní hodnota naší polohy po N krocích. Pro srovnání je do grafu vykreslena i druhá odmocnina z N označující dle našeho odhadu nejpravděpodobnější místo výskytu. Na obr. 1 je zakreslen 5. pokus 10 hodů. Celkově naše pokusy potvrdily teoretické odhady, při házení mincí s velikou dávkou štěstí, při simulaci díky většímu množství pokusů, ale také díky štěstí, neboť nic výsledek *nezaručovalo*.

3 Shrnutí

Celkově se nám, jak doufáme, podařilo potvrdit myšlenkový experiment náhodné procházky. Bohužel ústní presentace mohla být lepší, neodhadli jsme přesně její délku. To se nepodařilo pravděpodobně z důvodu nedostatku času. Dále by se dala vylepšit náhodná generace procházky, neboť k ní jsme využili funkci implementovanou přímo v Delphi Random(), která nemá optimální parametry, i když pro naše účely vystačila. Doufáme, že se presentace posluchačům líbila, a proto ji hodnotíme jako úspěšnou.

Poděkování

Závěrem bychom chtěli poděkovat jednak Richardu Feynmanovi za úchvatnou procházku fyzikou a posluchačům, kteří s námi měli strpení a našli v sobě dostatek odvahy k pokusu s házením mincí, jmenovitě bychom chtěli vyzdvihnout dobrovolníka, který se házení ujal. Děkujeme.

Reference:

[1] R. Feynman, Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 1/3, Fragment, Praha, 2000, str. 77-91