Škádlení fyziky škálováním

Jiří Šatánek
jiri.satanek@circletech.net

30. října 2007

- Co je to škálování?
  - Změna měřítka(škály).
  - Transformace podobnosti.
  - Zachovává tvar, ale mění vzdálenosti.
  - Transformaci zapíšeme:

$$x \mapsto \alpha x \quad \alpha \in R \tag{1}$$

- Proč se zabývat škálováním?
  - Mocniny okolo nás (“Power Law”)

$$f(x) = ax^k + o(x^k) \tag{2}$$

    Škálovatelnost (“Scale invariance”)

$$f(\alpha x) = a\alpha^k x^k + o(x^k) \tag{3}$$

  - Elegantní odpověď na škodolibé úlohy

- Mocniny okolo nás ("Power Law")
  - obsah povrchu (toky skrz plochu)
$$S(r) \sim r^2 \tag{4}$$
  - objemy (zdroje)
$$V(r) \sim r^3 \tag{5}$$
  - Newtonův gravitační zákon, Coulombův zákon
$$F(r) \sim r^{-2} \tag{6}$$
$$U(r) \sim r^{-1} \tag{7}$$
  - Malé kmity
$$F(r) \sim r \tag{8}$$
$$U(r) \sim r^2 \tag{9}$$
  - Homogenní pole
$$F(r) \sim r^0 \tag{10}$$
$$U(r) \sim r^1 \tag{11}$$

- Další mocniné závislosti
  - Třecí síly (mocniny rychlosti)

$$F_t(v) \sim \begin{array}{ll} v^0 & \text{Coulomb} \\ v^1 & \text{Stokes} \\ v^2 & \text{Rayleigh} \end{array} \qquad (12)$$

  - Stefan-Boltzmann (záření černého tělesa)

$$j(T) \sim T^4 \qquad T \text{ je teplota} \qquad (13)$$

  - Fázové přechody - kritické exponenty

$$f_i(T) \sim (T - T_c)^{-\alpha_i} \qquad (14)$$

  - Zajímavůstky
    * Zipf
      Frekvence slov v jazykovém korpusu je nepřímo úměrná pořadí ve frekvenční tabulce.Objevuje se na mnoha nečekaných místech.

$$P \sim n^{\alpha} \qquad \alpha \text{ je většinou } 1 \qquad (15)$$

- Škálovatelnost, soběpodobnost ("scale invariance","self-similarity")

  - Homogenní funkce k-tého stupně

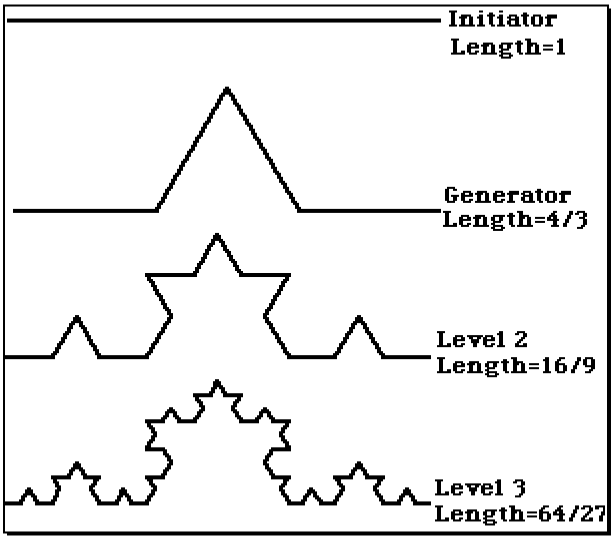
$$f(\alpha v) = \alpha^k f(v) \quad \forall \alpha \in R \tag{16}$$

  - Soběpodobnost (fraktály)

$(\exists \lambda \in R)(\forall n \in Z)$

$\alpha = \lambda^n$

$f(\alpha v) = \alpha^k f(v)$(17)



Konstrukce Kochovy křivky

Např.Pro Kochovu křivku může být jen

$$\alpha = \left(\frac{1}{3}\right)^k \quad \forall k \in N \tag{18}$$

Aplikace škálování na pohybovou rovnici

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx} \tag{19}$$

Je-li potenciál homogenní fce

$$U(\alpha r) = \alpha^k U(r) \tag{20}$$

Přejdeme-li od x k x‘:

$$x‘ = \alpha x \tag{21}$$

a od t k t‘:

$$t‘ = \beta t \tag{22}$$

Potom pravá strana

$$\frac{dU(\alpha x)}{d(\alpha x)} = \alpha^{k-1}\frac{dU(x)}{dx} \tag{23}$$

Na levé straně dostaneme:

$$m\frac{d^2\alpha x}{d\beta t^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{24}$$

Pohybová rce (19) se nezmění při násobení konstantou, proto musí:

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = \alpha^{k-1} \tag{25}$$

nebo-li

$$\alpha^{1-\frac{k}{2}} = \beta \tag{26}$$

- Newtonův gravitační potenciál $\left(\sim \frac{1}{r}\right)$

$$k = -1 \tag{27}$$

Potom, máme-li dvě podobné trajektorie o charakteristickém rozměru R_i:

$$R_2 = \alpha R_1 \tag{28}$$

Zároveň ovšem pro charakteristické časy:

$$T_2 = \beta T_1 \tag{29}$$

A tedy podle rce (26) a z rovnosti(27):

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{1+\frac{1}{2}} = \frac{T_2}{T_1} \qquad (30)$$

Dostáváme tedy 3. Keplerův zákon:

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{2} \qquad (31)$$

- homogenní pole (r)

$$k = 1 \qquad (32)$$

Zcela analogicky dostaneme (ze zvyklosti volime h_i a t_i):

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{1-\frac{1}{2}} = \frac{t_2}{t_1} \qquad (33)$$

Tedy:

$$\sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \frac{t_2}{t_1} \qquad (34)$$

- Malé kmity

$$k = 2 \tag{35}$$

Stejným postupem dostaneme:

$$\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{1-\frac{2}{2}} = \frac{T_2}{T_1} \tag{36}$$

$$\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{0} = \frac{T_2}{T_1} \tag{37}$$

Nezávislost periody kmitů na amplitudě

- Podobně lze snadno odvodit:

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{\frac{k}{2}} \tag{38}$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{k} \tag{39}$$

$$\frac{M_2}{M_1} = \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{1+\frac{k}{2}} \tag{40}$$

- Použití při řešení úloh
  - Typicky případy, kdy nás zajímá, jak se změní t či l pro podobné drahy, když změníme hmotnost, vynásobíme potencialní energii konstantou etc.
  - Všude, kde pracujeme s homogenními fcemi a jde to ;)
- Použití škálování v pokročilejších partiich fyziky
  - Klasická mechanika
    Provedená odvození lze provést beze změn pro Lagrangian
  - Klasická teorie pole
  - Kvantová teorie pole (conformal symmetry)
  - Přes projektivní geometrie vazba na superstruny

Poděkování :

- Autorům:
  - “Kursu po teoreticeskoj fizike” L.D.Landauovi&E.M.Lifšitcovi
  - Wikipedie
  - LaTeXu

!!! Lobbying !!!

Dedikovat seminář L.D.Landauovi

!!! Lobbying !!!

Díky za pozornost ;) !