Kyvadlo vzhůru závěsem

M. Hlaváč*, A. Hoskovec**
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Břehová 7, 115 19 Praha 1
martin_hlavac@seznam.cz*, a.hoskovec@gmail.com**

Abstrakt

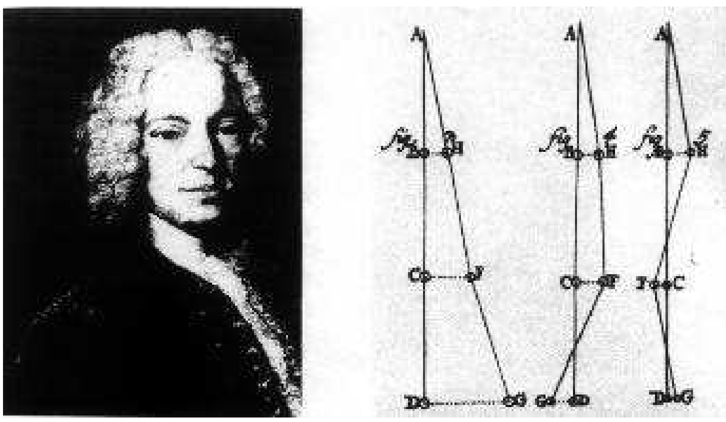
Myslíte, že je možné postavit kyvadlo vzhůru nohama tak, aby nespadlo, aniž bychom ho podpírali nebo přidržovali? Abychom to zjistili, provedli jsme experiment a zjistili, že… ano, je to možné! Náš příspěvek vám objasní něco málo z problematiky kyvadel, dále pak obsahuje popis Kapizovy metody a popis přípravy experimentu.

1 Úvod

Zaujal nás experiment popsaný v knize „1089 a jiná parádní čísla" od Davida Achesona. Autor ve své knize tvrdí, že když kyvadlo obrátíte vzhůru nohama a vertikálně rozkmitáte jeho závěs se správnou frekvencí a amplitudou, kyvadlo nespadne, ale bude kmitat nahoře. A to i v případě, že se jedná o tzv. teleskopické kyvadlo (kyvadlo vniklé spojení libovolného počtu kyvadel). V souladu s „důvěřuj, ale prověřuj" jsme se pokusili experimentem ověřit správnost tohoto tvrzení.

2 O kyvadlech

Kyvadlo je, jak známo, charakterizováno svou dobou kmitu. Počet kmitů za jednotku času nazveme přirozenou frekvencí kyvadla. Švýcarský matematik Daniel Bernoulli publikoval v roce 1738 článek, v němž se věnuje popisu kyvadel teleskopických. Máme-li kyvadlo o N článcích, jsme podle Bernoulliho schopni jej rozkmitat jednou z N přirozených frekvencí f_1, …, f_N, kde f_1 je nejnižší frekvence a f_N nejvyšší. Při f_1 se kyvadla pohybují současně, jako by tvořila jedno velké kyvadlo. Naopak při f_N kmitají sousední kyvadla vždy opačnými směry.



Obr. 1 Daniel Bernoulli a oscilační stavy tříčlenného teleskopického kyvadla

3 Matematický aparát

Abychom porozuměli kyvadlu postavenému na hlavu, začneme tím, že si napíšeme pohybovou rovnici pro kyvadlo upevněné na vertikálně kmitajícím závěsu

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma\frac{d\varphi}{dt} + (\omega_0^2 + a \cdot cos2\pi ft)\sin\varphi = 0,$$

kde γ je konstanta charakterizující vynucené kmitání a a je amplituda. Nyní aplikujeme Kapizovu metodu. Jejím autorem je ruský fyzik P. L. Kapiza, který ji používal k analytickému popisu systémů, jejichž vlastní frekvence kmitání je mnohem menší než frekvence budících kmitů. Metoda vychází z rovnosti

$$\varphi(t) = \varphi_{slow}(t) + \varphi_{fast}(t),$$

kde φ_{slow} složka kmitání s nižší frekvencí a φ_{fast} je složka s frekvencí vyšší (budící kmity). Skloubením obou rovnic dostaneme dvě pohybové rovnice, jednu pro φ_{slow} a jednu pro φ_{fast}. Celý postup je detailněji popsán na internetové adrese viz. [3]. Naše počínání by nás mělo dovést k následujícímu výsledku

$$a > \sqrt{2\omega_0^2 \frac{\left[(2\pi f)^2 + \omega_0^2\right]^2 + (2\pi\gamma f)^2}{(2\pi f)^2 + \omega_0^2}},$$

což je podmínka pro to, aby bylo kyvadlo stabilizováno v poloze „nohy nahoru.“

4 Experiment

Pro výrobu zařízení budícího kmity, jsme použili větráček z počítače, stavebnici Merkur, špejle a špendlíky. Zdroj vertikálních kmitů, jsme získali přeměnou točivého pohybu větráčku na pohyb posuvný (stejně jako např. u válcového motoru, kde je ovšem přeměna provedena obráceně tj. z posuvného na otáčivý pohyb). Potřebná kloubová spojení jsme vytvořili propíchnutím špejlí špendlíkem. Protože však byl špendlík ve špejli sevřený, bylo nutné díry do špejlí vypálit, abychom vytvořili u děr vůli a snížili tak tření. Samotný experiment byl pak proveden nejprve úspěšně s jednoduchým kyvadlem a následně pak neúspěšně s teleskopickým kyvadlem o dvou článcích. Z neúspěchu experimentu se zavěšeným teleskopickým kyvadlem viníme slabý motor větráčku, pro který byly dvě špejle nejspíš příliš velká zátěž.

5 Závěr

Myslím, že závěrem stojí za to zmínit, co vlastně Davida Achesona přivedlo ke zkoumání kyvadel otočených vzhůru nohama. Byl požádán, aby objasnil indický trik s lanem. Ten vypadá následovně: Kouzelník vezme konec lana a hodí jej do vzduchu. Lano ovšem nespadne dolů, jak by člověk očekával, ale zůstane volně viset ve vzduchu. A ke všemu po něm nahoru vyšplhá chlapec. Asi by vás zajímalo, kde se v tomto triku setkáme s kyvadlem? Nuže, kdybychom si lano, představili jako spoustu malinkých spojených kyvadel a snažili se toto maxiteleskopické kyvadlo stabilizovat v poloze nahoře… Acheson sám uznává, že souvislost indického triku s lanem a jeho tvrzením o kyvadlech může být minimální, přesto se osobně domnívám, že jeho objev je dostatečně fyzikálně krásný na to, abychom ho jen tak zahodili.

Poděkování

Rádi bychom poděkovali panu ing. Svobodovi, že nám zapůjčil elektrický zdroj a proplatil větráček použitý při experimentu.

Reference

[1] D. Acheson, *1089 a další parádní čísla*, Dokořán, s.r.o., Zborovská 40, Praha 5, 2006, str. 153-164

[2] Obr. 1 Multiple pendulums [online]. [citováno 2008-24-04],
URL<http://home.jesus.ox.ac.uk/~dacheson/res10.html>

[3] The Lecture Room [online]. Franz-Josef Elmer, [citováno 2008-13-04],
URL: <http://monet.unibas.ch/~elmer/pendulum/upside.htm>