

Matematické modelování Chladniho obrazců

V. Potoček

ČVUT - FJFI, Břehová 7, 115 19 Praha 1

e-mail: vasek.potocek@post.cz

Abstrakt

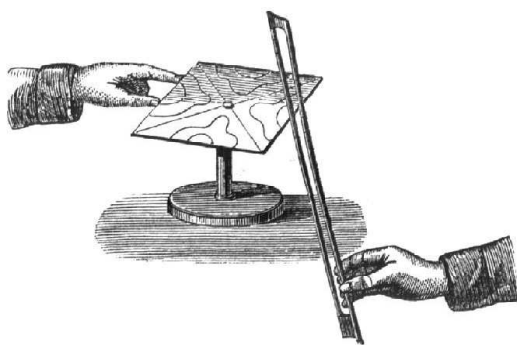
Práce si klade za cíl se po zběžném seznámení s Chladniho obrazci zaměřit na důsledné odvození parametrického vzorce, dle kterého lze jejich tvary počítat. Odvození je provedeno nezávisle na stávajících vzorcích z Internetu a výsledek je jejich zobecněním pro naprostou většinu skutečných obrazců zaznamenaných v zápiscích E. F. F. Chladniho.

1 Úvod

Chladniho obrazce jsou tvořeny uzlovými čarami vzniklými při kmitání kovové desky. Tyto útvary je možné zviditelnit, nasypeme-li na desku vrstvu písku nebo jemného prášku a rozeznáme-li ji (a uvedeme tak do rychlého kmitavého pohybu) smyčcem nebo reproduktorem. Prášek se uspořádá do míst, kde je kmitání nejslabší.

Německý fyzik E. F. F. Chladni (1756 – 1827) objevil a zkoumal tyto obrazce na deskách čtvercového a kruhového tvaru a ve středu upevněných, v jeho době však nebyl znám jejich matematický aparát. Tato otázka byla natolik zajímavá, že v roce 1808, po prvním předvedení na Francouzské Akademii věd, císař Napoleon nabídl kilogram zlata za odměnu tomu, kdo ji poprvé vyřeší [1].¹

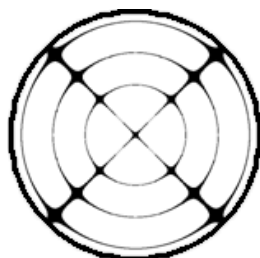
Tato práce se zabývá pouze deskami čtvercového tvaru.



obr. 1: Vznik Chladniho obrazce, zdroj: [2]

2 Odvození vzorce

Pokusy o odvození pomocí známých vzorců pro kmitání struny nebo vzduchového sloupce bohužel k výsledku nevedou a použití intuitivního postupu je možné jen ve velmi málo případech (a jeho výsledek vypadá neopodstatněně²), proto je třeba vyjít z jiných myšlenek.



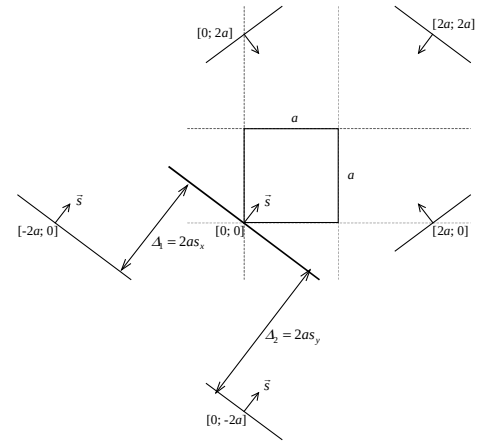
obr. 2: Chl. o. na kruhové desce

K výsledku by možná vedlo použití vlnové rovnice, ale ta je až zbytečně složitá. Jistě bychom ji použili u desek kruhového tvaru, kde bychom ji přepsali do polárních souřadnic a využili symetrie soustavy, ale touto cestou bychom došli k diferenciální rovnici, která nemá řešení v běžných funkcích. Jejím řešením jsou funkce Besselovy, ostatně zavedené pravděpodobně jen pro tento účel. Je zřejmé, že v případě desky čtvercového tvaru by tento způsob zavedl jen zbytečné komplikace. Zkusme tedy použít jiný postup, který známe již z jednodušších případů.

¹ Jeho otázka však byla položena mnohem obecněji, proto se jí zde již nebudeme zabývat.

² Jedná se o případy obrazců vypadajících jako obdélníková mříž – intuitivně lze jistě odhadnout vzorec $\cos m\pi x/a \cos n\pi y/a \cos \omega t$, tedy skutečně případ interference 4 vln, ale jaká je potom λ ?

Vraťme se k postupu použitému u jednorozměrné vlny. Uvažujme postupnou vlnu a její odrazy od hran, tuto vlnu však vyšleme v obecném směru. Obrázek 3 ukazuje tlustou čarou původní vlnu (část její vlnoplochy) jdoucí ve směru jednotkového vektoru $\vec{s} = (s_x, s_y)$. Dále jsou protaženy hrany desky jako osy symetrie a zakresleny odrazy vlny podle nich a jejich směrové vektory. Je vidět, že vlna odražená od horního a následně od spodního okraje (spodní) a vlna odražená vpravo a vlevo (nejvíce vlevo) mají stejný směr postupu jako původní vlna, ale dráhový rozdíl. Každá vlna s těmito svými dvojnásobnými odrazy bude tedy interferovat, a aby nastala rezonance (aby kmitočet vlny byl vlastní), musí každá z těchto interferencí být konstruktivní, tedy dráhový rozdíl musí být roven celistvému násobku vlnové délky. Podmínka rezonance tedy dává do vztahu vlnovou délku a směr vlny, protože dráhové rozdíly jsou na úhlu závislé:



obr. 3: Vlna a její odrazy

$$2as_x = k\lambda$$

$$2as_y = l\lambda$$

$$k, l \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{s_y}{s_x} = \frac{l}{k} \in \mathbb{Q}$$

$$\cos \alpha = s_x = \frac{k}{\sqrt{k^2 + l^2}}$$

$$\lambda = \frac{2as_x}{k} = \frac{2a}{\sqrt{k^2 + l^2}}$$

Vidíme, že na rozdíl od lineárního vlnovodu může čtvercová deska rezonovat na velkém množství dalších kmitočtů, které nejsou se stranou čtverce ani v poměru racionálních čísel. Pokud si můžeme v tuto chvíli dovolit takové zobecnění, je toto jistě důvodem krásného zvuku zvonů a složitosti jejich konstrukce. Ale zpět k odvození.

Dalším krokem bylo v případě struny spočítat superpozici dvou postupných vln, původní a odražené (již víme, že dvakrát odražená je s původní shodná). Vznikl vzorec vlny stojaté, který se vyznačoval tím, že obsahoval v součinu vzorec harmonických oscilací, závislý jen na čase, a vzorec udávající amplitudu v závislosti na poloze bodu na struně. Udělejme tedy tentýž krok: sečtěme vzorec naší původní vlny s vlnami odraženými od pravého a horního okraje a ještě jedné vlny, odražené od pravého i horního okraje, kterou jsme dosud nepotřebovali.

$$\begin{aligned} z(x, y, t) = & \cos(\omega t - \tilde{\omega}(x, y) \cdot \vec{s}) + \cos(\omega t - \tilde{\omega}(2a - x, y) \cdot \vec{s}) + \cos(\omega t - \tilde{\omega}(x, 2a - y) \cdot \vec{s}) + \\ & + \cos(\omega t - \tilde{\omega}(2a - x, 2a - y) \cdot \vec{s}) = \cos\left(\omega t - \tilde{\omega}x_s - \tilde{\omega}y_s\right) + \cos\left(\omega t + \tilde{\omega}x_s - \tilde{\omega}y_s\right) + \\ & + \cos\left(\omega t - \tilde{\omega}x_s + \tilde{\omega}y_s\right) + \cos\left(\omega t + \tilde{\omega}x_s + \tilde{\omega}y_s\right) \end{aligned}$$

Při úpravách jsme použili časté označení $\tilde{\omega} = \frac{2\pi}{\lambda}$, vlastnosti skalárního součinu a vzorce $2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$ a $2\cos y = e^{iy} + e^{-iy}$. Využijme nyní součtového vzorce pro kosinus, který lze snadno odvodit:

$$\cos a + \cos b = \frac{e^{ia} + e^{ib} + e^{-ia} + e^{-ib}}{2} = 2 \frac{\left(e^{i\frac{a+b}{2}} + e^{-i\frac{a+b}{2}} \right) \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}} \right)}{4} = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\begin{aligned} z(x, y, t) &= \cos(\omega t - \tilde{\omega} x x - \tilde{\omega} y y) + \cos(\omega t + \tilde{\omega} x x - \tilde{\omega} y y) + \cos(\omega t - \tilde{\omega} x x + \tilde{\omega} y y) + \\ &+ \cos(\omega t + \tilde{\omega} x x + \tilde{\omega} y y) = 2 \cos(\omega t - \tilde{\omega} y y) \cos(-\tilde{\omega} x x) + 2 \cos(\omega t + \tilde{\omega} y y) \cos(-\tilde{\omega} x x) = \\ &= 2 \cos(\tilde{\omega} x x) \left(\cos(\omega t - \tilde{\omega} y y) + \cos(\omega t + \tilde{\omega} y y) \right) = 4 \cos(\omega t) \cos(\tilde{\omega} x x) \cos(\tilde{\omega} y y) \end{aligned}$$

Tento vzorec můžeme ještě zjednodušit, dosadíme-li za λ :

$$\begin{aligned} z(x, y, t) &= 4 \cos(\omega t) \cos(\tilde{\omega} x x) \cos(\tilde{\omega} y y) = 4 \cos(\omega t) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{k\lambda}{2a} x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{l\lambda}{2a} y\right) = \\ &= 4 \cos(\omega t) \cos\left(k\pi \frac{x}{a}\right) \cos\left(l\pi \frac{y}{a}\right) \end{aligned}$$

Předpokládejme nyní, že k rozeznání použijeme reproduktor. V takovém případě můžeme najít nějaký rezonanční kmitočet, který je samozřejmě přímo spjat s odpovídající vlnovou délkou λ v materiálu desky, ne však již jednoznačně s nějakou dvojicí (k, l) . U čtvercové desky³ například platí, že vyhovuje-li dvojice (k, l) , dalším celočíselným řešením je (samozřejmě pro $k \neq l$) $(k', l') = (l, k)$. V mnohých případech můžeme najít i další možná řešení, ale pro každý obrazec níže stačilo znát předchozí tvrzení. Stojatá vlna je pak libovolnou superpozicí vln popsaných vzorcem uvedeným výše, a to právě pro různé dvojice (k, l) . Obecně je tedy funkcí okamžité výchylky suma

$$z = \cos(\omega t) \sum_{i=1}^n A_i \cos\left(k_i \pi \frac{x}{a}\right) \cos\left(l_i \pi \frac{y}{a}\right),$$

kteřou stačí uvažovat, jak bylo popsáno výše, se dvěma sčítanci,

$$z = \cos(\omega t) \left(A \cos\left(k\pi \frac{x}{a}\right) \cos\left(l\pi \frac{y}{a}\right) + B \cos\left(l\pi \frac{x}{a}\right) \cos\left(k\pi \frac{y}{a}\right) \right),$$

případně s jedním, pokud $B = 0$ ⁴.

To je hledaný vzorec, který již může být použit pro modelování Chladniho obrazců. K parametrům k, l přibyla ještě dvojice A, B , která je obecně dána polohou reproduktoru. Modely můžeme na počítači vyrobit snadno tak, že spočítáme po pixelech obrázku druhou mocninu⁵ části výrazu určující amplitudu vlny. Tato hodnota je rovna 0 v bodech uzlů

³ Čtenář snadno spatří změnu ve vzorci pro dráhový rozdíl v případě desky obdélníkového tvaru, která by způsobila, že jmenovatel λ by nebyl symetrický pro přechod mezi k a l .

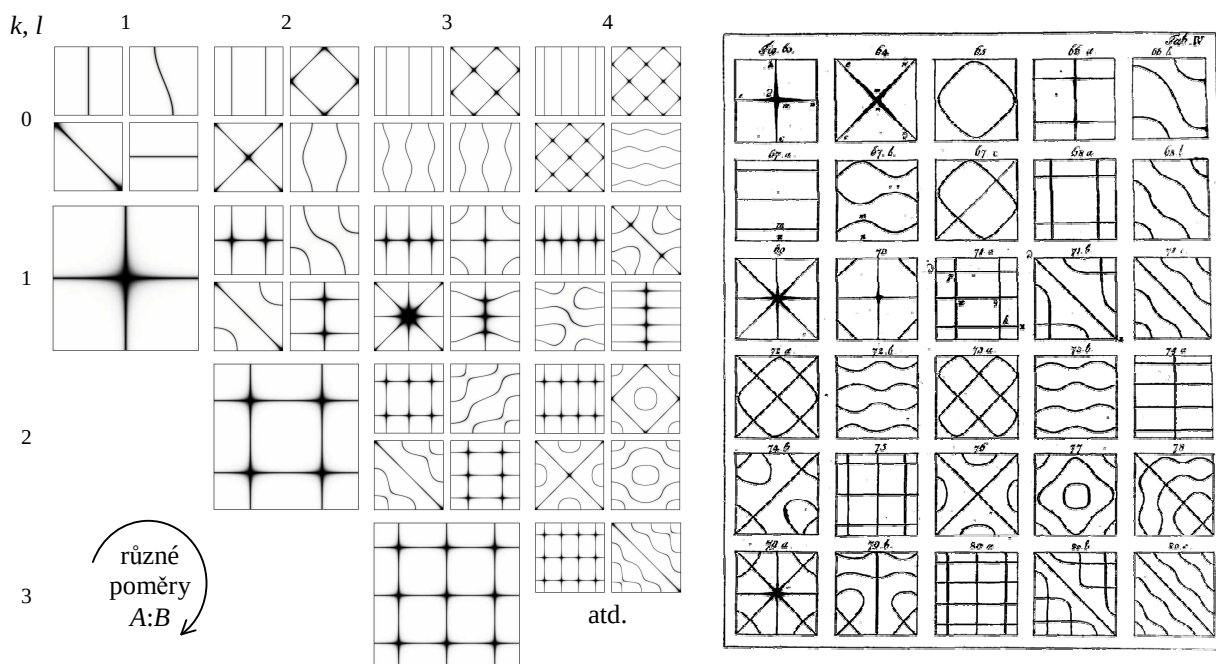
⁴ Stránka [1] uvádí podobný vzorec, ale pouze v případě $(A, B) = (1, -1)$, s vysvětlením, že se omezujeme na desku upevněnou ve prostředku. Snadno nahlédneme, že autoři provedli příliš hrubé omezení, jiná možnost je například k nebo l liché. Výsledek [1] tedy pravděpodobně nevychází ze stejného odvození.

⁵ Druhá mocnina této hodnoty je rovna dvojnásobku střední hodnoty druhé mocniny funkce z v čase.

a malým kladným číslem blízko nich, můžeme ji tedy použít jako barvu daného pixelu a výsledkem jsou černě zakreslené Chladniho obrazce.

3 Modely

Následující modely byly vytvořeny postupem uvedeným v minulém odstavci. Hodnoty A a B pro ukázkou jsou vybrány více méně náhodně. Vedle tabulky je kopie původních Chladniho náčrtků ([1]):



4 Diskuse

Některé obrazce nebylo možno namodelovat vzorcem odvozeným výše. Důvodem je, že použití funkce $\cos$ zaručuje středovou symetrii – a přesto se v náčrtcích vyskytují dva nesouměrné obrazce. Protože je silně nepravděpodobné, že by takovou chybu udělal sám Chladni, zůstává jejich původ autorovi záhadou.

5 Shrnutí

Sestavili jsme obecný vzorec stojaté vlny na čtvercové desce, který udával možné tvary Chladniho obrazců vybírané námi stanovenými parametry k , l , A , B . Tím však není otázka jejich matematického modelování dořešena zcela. Navazující práce by mohla objasnit odpovědi například na následující otázky:

1. Jak určíme (k, l, A, B) z polohy vynucených uzlů na obr. 1?
2. Jaký je původ nesymetrických obrazců v Chladniho náčrtcích?
3. Chladniho obrazce na obdélníkových deskách, případně i deskách dalších tvarů.

Reference:

- [1] <http://astronomy.swin.edu.au/~pbourke/modelling/chladni/>
 [2] <http://www.phys.uniroma1.it/DOCS/MUSEO/acu9.htm> - obrázek 1