Oscilace

Kmitavý pohyb

Veličiny, které ho popisují, se s časem mění (někdy periodicky). Kmitavý pohyb, jehož časový diagram má podobu sinusoidy, nazýváme jednoduchý nebo harmonický kmitavý pohyb.

Mechanický oscilátor – zařízení, které po vychýlení z rovnovážné polohy může volně kmitat.

KINEMATIKA HARMONICKÉHO KMITAVÉHO POHYBU

Pohyb popisujeme podle veličin polohový vektor r, rychlost v a zrychlení a. Můžeme je získat porovnáním kmit. Pohybu s pohybem rovnoměrným po kružnici. Harmonické kmitání je pak popsáno souřadnicí y polohového vektoru r.

Rovnice harmonického kmitání: $y = Y\sin \omega t$; y – okamžitá výchylka

Y- amplituda výchylky

ωt – okamžitá fáze kmitání

Perioda a frekvence kmitání : úhlová frekvence $\omega = 2\pi / T = 2\pi f$ (rad / s)

Rychlost a zrychlení kmitavého pohybu

Jestliže opět využijeme podobnosti s pohybem po kružnici, dostaneme hledané vztahy :

$$\mathbf{v = \omega Y\cos \omega t}$$

- V rovnovážné poloze je rychlost kmit. pohybu největší

  $V = \omega Y$
- Pro amplitudu výchylky je rychlost nulová

Vektor zrychlení směřuje do rovnovážné polohy, proto má opačné znaménko :

$$\mathbf{a = -\omega^2 y}$$

- Zrychlení je přímo úměrné okamžité výchylce

Fáze kmitavého pohybu

Počáteční hodnotu veličiny vyjádříme pomocí úhlu φ - počáteční fáze kmitání.

Okamžitá výchylka $y = Y\sin(\omega t+\varphi)$

Při posuzování dvou veličin vyjadřujeme jejich fázový rozdíl. Jestliže dvě harmonické veličiny mají stejnou úhlovou frekvenci a počáteční fáze $\varphi 1$, $\varphi 2$, pak pro fázový rozdíl φ platí : $\varphi = (\omega t+\varphi 2) - (\omega t+\varphi 1)= \varphi 2-\varphi 1$

Je-li $\varphi = 2k\pi$ rad; $k\in Z$ – stejná fáze

$\varphi = (2k + 1)\pi$ rad; $k\in Z$ – opačná fáze

<u>Složené kmitání</u>

Výsledná poloha tělesa v mechanice, které koná více pohybů, je stejná, jako kdyby tyto pohyby konalo v libovolném pořadí.

Princip superpozice : Jestliže hmotný bod koná současně několik harmonických kmitavých pohybů téhož směru s okamžitými výchylkami y1, y2, …,yn, je okamžitá výchylka výsledného kmitání **y = y1+y2+…+yn.**

Superpozicí vzniká složené kmitání. Harmonická kmitání nazýváme **izochronní**, jestliže mají stejnou úhlovou frekvenci ω. Jiná kmitání jsou **neizochronní**. Jejich skládáním vzniká neharmonické kmitání, jsou-li frekvence $\omega 1$, $\omega 2$ blízké, vznikají **rázy**.

Jestliže se kmity dějí v přímkách navzájem **kolmých** a frekvence ω jsou v poměru **celých čísel**, vznikají **Lissajousovy křivky**.

Harmonický oscilátor

Uvažujeme jednorozměrný pohyb částice hmotnosti **m** například podél osy **x**, na níž působí síla

$$F_x = -kx$$

Částice má v tomto silovém poli potenciální energii

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Částice bude vykonávat netlumené harmonické kmity s vlastní úhlovou frekvencí

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Odvození:

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} = \omega^2 r$$

$$m\omega^2 r = -kr$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Tlumené kmitání

Tlumení u kmitání je závislé na rychlosti oscilujícího tělesa. Proto musíme upravit pohybové rovnice na tvar:

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{h\dot{x}}{m} + \frac{kx}{m} = 0$$

přičemž zavádíme

$$\frac{h}{m} = 2\delta \Rightarrow \delta = \frac{h}{2m}$$

δ . . . dekrement útlumu. Charakterizuje vlastnosti tlumení oscilátoru. Celková rovnice pak vypadá:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Řešení najdeme potom ve tvaru

$$x = a \cdot e^{-\delta \cdot t} \sin(\omega t)$$

Z uvedených vztahů vidíme, že křivka spojující maximální výchylky oscilátoru má tvar exponenciály.

V závislosti na dekrementu útlumu však můžeme rozdělit tlumení na tři hlavní průběhy kmitů.

a) $\delta \cong 0$ . . . Tlumení téměř nenastává. Jedná se o ideální případ. V praxi téměř neexistující.

b) $\delta > 0$ . . . Oscilátor je tlumen, pohybové rovnice jsou již uvedeny výše.

c) $\delta >> 0$ . . . Dochází k velkému útlumu, může dojít k tomu, že oscilátor ani jednou nepřekmitne a pomalu se vrací do své původní rovnovážné polohy. Dále pak může dojít k tomu, že vychýlený oscilátor se nenavrací do původní polohy. Experimentálně se nám ale nepodařilo vytvořit tak velký útlum. Vždy alespoň jednou oscilující předmět prokmitl.

Rezonance

Nechť na oscilátor působí vnější periodická harmonická síla s periodou **Ω.** Tato síla bude oscilátor rozkmitávat, vnucovat mu svou frekvenci, dodávat mu energii. Mluvíme o vynucených kmitech oscilátoru. Nechť má síla časový průběh například $F_x(t) = F_0 \cos \Omega t$. Pak bude pohybová rovnice nehomogenní:

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F_x(t)$$

Označíme $B = F_0/m$ a přepíšeme pohybovou rovnici na tvar:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = B\cos\Omega t$$

Je rozumné očekávat, že tyto vynucené kmity budou probíhat s frekvencí Ω a pokusíme se najít řešení ve tvaru:

$$x(t) = A\sin(\Omega t + \varphi_0)$$

Po úpravě goniometrických funkcí a soustavy rovnic o dvou neznámých A a φ_0 dostáváme vztahy pro :

$$\mathrm{tg}\,\varphi_0 = \omega_0^2 - \Omega^2/2\delta\Omega \quad \text{a} \quad A = B/[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2]^{1/2}$$

Vynucené kmity oscilátorů jsou netlumené, soustava se nachází ve stavu energetické rovnováhy – ztráty mechanické energie disipací jsou nahrazovány energií vnějšího zdroje, vynucující síly. Čím jsou ztráty menší, tím se větší účinností je vnější energie absorbována a roste maximální amplituda oscilací. Ta může někdy dosáhnout nebezpečně velkých hodnot (například při rezonančním kmitání mostu, vozidla nebo stroje). Na druhé straně rezonance umožňuje zachycovat a pak zesilovat velmi slabé elektromagnetické signály a má i jinak velmi důležité uplatnění ve fyzice a technice.

Mohlo by se zdát absurdní, že při dostatečně malém útlumu můžeme s omezeným zdrojem energie dosáhnout libovolně velké amplitudy kmitů, například malý chlapec by teoreticky mohl svým během způsobit zhroucení mostu. Útlum ovšem nelze učinit libovolně malým a kromě toho kmity mechanických systémů přesně vzato nikdy neprobíhají jen na jediné frekvenci, vždy existuje určité frekvenční spektrum, takže nekonečné hodnoty amplitudy dosáhnout nelze.