Fraktální geometrie

Vypracovali: Jiří Thoma

Jiří Pelc

Jitka Stokučová

Topologická a fraktální dimenze

Fraktální (Hausdorffova - Besicovitchova) dimenze **D** udává míru nepravidelnosti geometrického útvaru. Pro každý objekt platí vztah $\mathbf{D} \geq \mathbf{D_T}$, ale jako fraktály označujeme jen ty, jejichž $\mathbf{D} > \mathbf{D_T}$ ($\mathbf{D_T}$ je topologická dimenze) Hodnota **D** nám slouží k tomu, abychom přesně určili, jak je útvar rozměrově vzdálený od daného celočíselného rozměru (např. pro fraktální křivku, pro kterou platí $\mathbf{1} < \mathbf{D} < \mathbf{2}$, určíme, do jaké míry se svým tvarem odlišuje od linie a od plochy).

Vztah hodnoty fraktální dimenze a nezávislosti tvaru fraktálu na měřítku je možné ověřit měřením délky objektu. Vezmeme si objekt s celočíselnou hodnotou **D** ($\mathbf{D} = \mathbf{D_T}$), např. úsečku, jejíž $\mathbf{D_T} = \mathbf{1}$. Na obrázku č.2 máme znázorněnou úsečku, jejíž délku budeme měřit. Máme k dispozici čtyři různá měřítka. Čím menší měřítko použijeme, tím více narůstá délka - zpřesňujeme naměřenou hodnotu. Výsledná délka směřuje k nějaké limitní hodnotě.

Měření délky úsečky pomocí měřítek o různých velikostech

Tuto vlastnost fraktály nemají. Při zjemňování měřítka nedochází ke zpřesňování hodnoty, ale tato hodnota stále narůstá.

Richardsonův efekt -příklad - měření délky pobřeží. Měříme-li pomocí velkého měřítka, spousta detailů nepravidelného útvaru nám uniká, zmenšujeme-li měřítko, stále více detailů zohledňujeme. V důsledku toho měřená délka stále narůstá. Závislost měřené délky na velikosti měřítka je u fraktálů dána empirickým vztahem:

$$L(\varepsilon) \approx \frac{konst}{\varepsilon^{D-1}},$$

kde L je naměřená délka objektu, ε je velikost měřítka a D je fraktální dimenze. Rovnici převedeme na výraz

$$L(\varepsilon) \sim \varepsilon^{1-D}$$

Platnost tohoto vztahu můžeme ověřit na příkladu jednoho z nejjednodušších fraktálů - Kochovy křivky

pro celkovou délku platí:

$$L = 3\left(\frac{4}{3}\right)^{p} = \frac{3}{\left[(1/3)^{p}\right]^{D-1}}$$

Položíme např. p = 1$\Rightarrow$ 4/3 = $(1/3)^{1-D}$. Po zlogaritmování a úpravě můžeme vypočítat fraktální dimenzi:

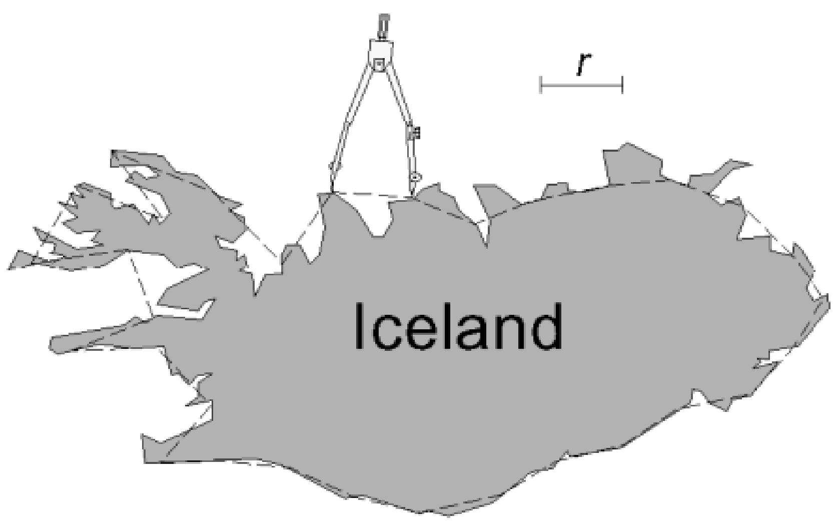
$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1{,}2618\ldots$$

Při každé transformaci se délka opět mění na 1/3 své původní hodnoty a počet samopodobných prvků N = 4. Proto ***D = log 4/log(1/(1/3)) = log 4/log 3***.

Výpočet fraktální dimenze přírodních struktur

Obvodová metoda (compass dimension)

Tato metoda spočívá v měření obvodu nepravidelného útvaru pomocí různých měřítek.



Měření obvodu nepravidelného útvaru. Jako r označujeme velikost použitého měřítka.

Pro naměřenou délku platí vztah

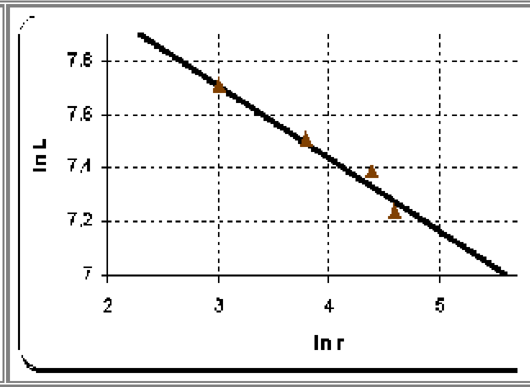
$$L_{(r)} = N_{(r)} \cdot r$$

Obvod změříme pomocí několika různých měřítek Pro další postup využijeme platnost vztahu

$$D = \frac{\log N}{\log(1/r)}$$

kde logN označujeme jako faktor změny délky a log(1/r) jako faktor změny měřítka. Hodnotu výrazu snadno odhadneme, vyneseme-li do grafu závislost logaritmu velikosti měřítka na logaritmu naměřené hodnoty obvodu - jedná se o tzv. Mandelbrotův- Richardsonův graf

r [km]	N	$L = N \cdot r$ [km]	$\ln r$	$\ln L$
200	6	1200	5.30	7.09
100	14	1400	4.61	7.24
80	20	1600	4.38	7.38
40	46	1840	3.69	7.52
20	112	2240	3.00	7.71



Obr.10: Stanovení dimenze měřením obvodu (podle Krafta a Kauera, 1995).

.

Existují i další metody odhadu fraktální dimenze, které jsou založeny např. na zjišťování intenzity zbarvení jednotlivých částí černobílých i barevných fraktálních útvarů, např. tzv. dvojrozměrná variační metoda nebo metoda analýzy povrchu fraktálu
(např. in Kraft&Kauer 1995).

Definice pojmu fraktál:

Jestliže víme, co je to ***topologická dimenze*** a ***Hausdorffova dimenze***, mužeme zde uvést definici fraktálu tak, jak ji formuloval matematik Benoit B. Mandelbrot:

Fraktál je množina, jejíž Hausdorffova dimenze je větší než dimenze topologická.

Tato definice fraktálu je sice jednoduchá a přesná, ale vylučuje některé objekty, které také považujeme za fraktály. Proto je zde uvedena obecnější definice fraktálu:

Fraktál je geometrický útvar, který lze rozdělit na části, přičemž tyto části jsou (alespoň přibližně) zmenšené kopie celého útvaru. Fraktál je soběpodobný a nezávislý na měřítku.

Použitá literatura:

- **Barnsley M.F, Fractals everywhere, 1993 2nd edition, Academiv Press, San Diego**
- **Mandelbrot B. B., The FRactal Geometry of Nature, 1982, W. H. Freeman & Co., San Francisko**
- **Kůrková Věra, Fraktální geometrie, 1989, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, č.5, str. 267-277**.
- **Kůrková Věra, Mandelbrotova fraktální geometrie, 1988, Vesmír 8, str. 458-464**
- **Falconer, Kenneth, Fractal geometry : Mathematical foundations and applications , Chichester : Wiley, 1999**
- **Internet: http://egg.baf.cz/fractals.html, http://www.elektrorevue.cz/clanky/01022/01.htm.iso-8859-1,**

-