Problém nejen tří těles

Tomáš Kalvoda, Jan Kodovský

Historické souvislosti

Problém pohybu 2 a více těles úzce souvisí s představami lidí o vesmíru. Již starověcí Řekové se zabývali tím, co viděli na obloze. Ptolemaios v té době přišel s představou, že Země je středem vesmíru a ostatní planety obíhají kolem ní. Snažil se zjistit i dráhy planet, ale neúspěšně.

Ptolemaiova představa byla překonána až v roce 1543 Mikolášem Koperníkem, který ve svém díle *De revolutionibus orbium coelestium* zveřejnil svou myšlenku, že planety, včetně Země, obíhají kolem Slunce po kruhových drahách. V roce 1600 se Johannes Kepler stal asistentem Tycha Braheho. Z jeho měření Kepler ukázal, že se planety pohybují po eliptických drahách, v jejichž ohnisku leží Slunce. Dále zjistil, že průvodič dráhy planety opíše za stejný interval vždy stejnou plochu. Tyto dva zákony popsal ve svém díle *Astronomia Nova* v roce 1609. Ve svém dalším díle *Harmonica mundi* z roku 1619 publikoval svůj třetí zákon, dávající do souvislosti oběžnou dobu planety a její hlavní poloosu.

Na tyto poznatky navázal Newton odvozením gravitačního zákona, který zveřejnil ve svém slavném díle *Principia*. Dále také odhalil, že přitažlivá síla dvou těles klesá s druhou mocninou vzdálenosti a tato vlastnost vede k pohybu planet po elipse, parabole nebo hyperbole. Také teoreticky vyřešil problém dvou těles.

Kolem roku 1760 se Euler zabýval obecným řešením problému 3 těles. Nejprve problém zjednodušil předpokladem, že jedno z těles má zanedbatelnou hmotnost. V tomto případě lze problém tří těles řešit jako problém dvou těles, protože těleso se zanedbatelnou hmotností gravitačně neovlivňuje zbývající dvě tělesa. Později řešil problém pohybu třetího tělesa, které je přitahováno hmotou zbývajících dvou těles. Ale ani tento problém nevede k přesnému řešení. Euler nalezl řešení pro případ, že všechna tři tělesa leží na přímce.

Metoda řešení naší simulace

Při simulaci pohybu těles používáme Eulerovu metodu řešení diferenciálních rovnic. Vycházíme z Newtonova gravitačního zákona

$$\vec{F}_i = \kappa \cdot m_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{m_j \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j \right)}{\left| \vec{r}_i - \vec{r}_j \right|^3} \qquad (1.1)$$

kde F_i je síla působící na i-té těleso, m_i a m_j jsou hmotnosti a r_i a r_j polohové vektory odpovídajících těles.

Z rovnice (1.1) můžeme určit zrychlení působící na těleso

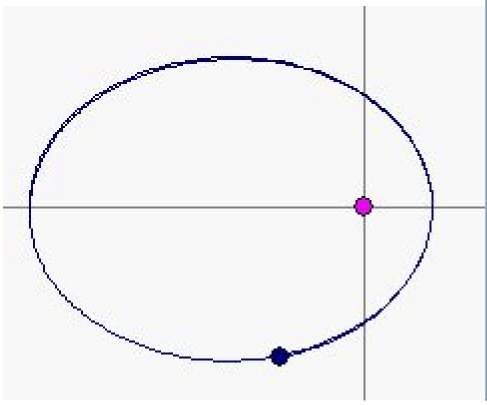
$$\vec{a}_i = \kappa \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{m_j \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j \right)}{\left| \vec{r}_i - \vec{r}_j \right|^3} \tag{1.2}$$

Dále uvažujeme, že se těleso bude pohybovat s tímto zrychlením v malém časovém intervalu t. Za tuto dobu získá jistou rychlost v. Sečtením této rychlosti s rychlostí, kterou se těleso pohybovalo v předcházejícím okamžiku získéme novou rychlost tělesa, pomocí níž snadno spočítáme změnu polohy za čas t. Tyto operace musíme aplikovat na všech n těles.

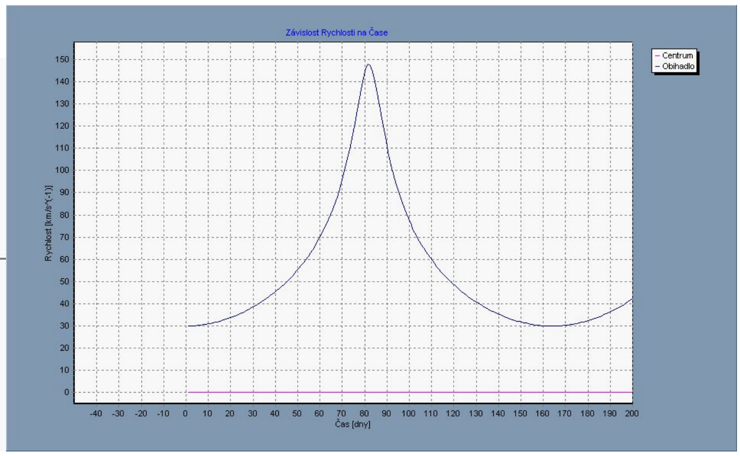
Přesnost této metody velmi závisí na volbě t. Čím menší bude interval t tím přesnější budou výsledky metodou získané, ale výpočet bude o to víc časově náročnější.

Ukázka programu

K simulaci tohoto problému jsme ve vývojovém prostředí Delphi vymysleli a sepsali program, který je možno si stáhnout i se zdrojovým kódem na internetové adrese (*a1*).

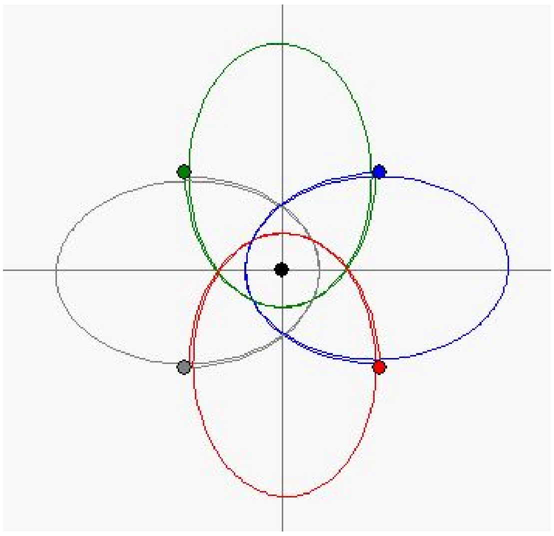


obr 1



obr 2

Na obrázku č. 1 tak například vidíte trajektorii tělesa obíhajícího okolo hmotnějšího tělesa. Můžeme si povšimnou, že trajektorie je skutečně eliptická a že hmotnější těleso leží v jejím ohnisku. Hmotnost obíhajícího tělesa je 10^{25} kg a hmotnost centrálního tělesa 10^{31} kg. Největší vzdálenost obou těles činí 250000000000 km. Obrázek č. 2 znázorňuje závislost rychlosti na čase stejné situace. Vidíme, že rychlost obíhajícího tělesa je největší v místě nejbližším druhému tělesu a nejmenší v místě nejvzdálenějším. Obrázek č. 3 zobrazuje trajektorie 4 těles obíhajících kolem centrálního, hmotnějšího tělesa. Hmotnosti obíhajícíh těles jsou 30 kg, hmotnost centrálního 10^{23} kg.



Problém tří těles je současnými analytickými metodami neřešitelný a k získání přibližných výsledků se používá numerických metod, simulovaných počítači.

Web:

tkpage42.fbi.cz (a1)
www.aldebaran.cz/index_01.html
www.kw.igs.net/~jackord/bp/f8.html
astro.u-strasbg.fr/~koppen/body/ThreeBody.html
www.math.washington.edu/~hampton/research.html

Literatura:

Mechanika, Doc. Ing. Ivan Štoll, CSc.
Feynmanovy přednášky z fyziky, Feynman, Leighton, Sands
Průvodce astronomií, Pavel Příhoda

Kontak:

Tomas.Kalvoda@seznam.cz
rambonit@volny.cz